



Développement d'un modèle de simulation 3D d'impact de vagues en zones côtières et offshores

Alioune Nar Sambe

► To cite this version:

Alioune Nar Sambe. Développement d'un modèle de simulation 3D d'impact de vagues en zones côtières et offshores. Autre. Université de Toulon, 2011. Français. NNT: 2011TOUL0012. tel-00681270

HAL Id: tel-00681270

<https://theses.hal.science/tel-00681270>

Submitted on 21 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DU SUD TOULON VAR

THESE

Présentée par

Alioune Nar SAMBE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université du Sud Toulon Var

Discipline: Mécanique

Spécialité: Mécanique des Fluides Numérique

**Développement d'un modèle de simulation
3D d'impact de vagues en zones côtières et
offshores**

Présentée et soutenue publiquement le

23 Novembre 2011

devant le jury composé de:

Mr FRAUNIE Philippe
Mr GOLAY Frédéric
Mr GRILLI Stéphan
Mr HELLUY Philippe
Mr MARCER Richard
Mr MORY Mathieu
Mr SOUS Damien

Professeur, Université du Sud Toulon-Var
Maitre de Conférences (HDR), USTV
Professeur, Université du Rhode Island (USA)
Professeur, Université de Strasbourg
Ingénieur expert CFD, PRINCIPIA
Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour
Maitre de Conférences, Université du Sud Toulon-Var

Directeur de thèse
Co-directeur de thèse
Rapporteur
Président du jury
Membre invité
Rapporteur
Examineur

Cette thèse a été financée par le Conseil Régional de la région PACA et PRINCIPIA

Remerciements

Ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans la contribution des nombreuses personnes avec qui j'ai eu le privilège et le plaisir de collaborer pendant toute la période de la thèse. Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mes encadrants qui m'ont beaucoup appris. Que de fois, vous m'avez accompagné et aidé dans mes travaux et à présent j'ouvre les portes de mon cœur pour vous dire Merci. Merci à Philippe FRAUNIE, à Frédéric GOLAY, à Richard MARCER et à Damien SOUS. Ce mot MERCI est l'expression la plus simple et la plus directe de ma pensée dont je sois capable de formuler car difficiles sont les mots qui me permettraient d'exprimer tout ce qu'il a dans le profond de mon cœur.

En tout premier lieu, je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance envers Philippe FRAUNIE. Il m'a accueilli au sein de son laboratoire de recherche LSEET et m'a permis de traiter un sujet intéressant dont l'application industrielle est importante. Il a su me conseiller et est resté toujours disponible. Je le remercie pour ses nombreuses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Je me rappellerai toujours cette phrase que vous m'aviez dit dans une conférence, quant au début de la présentation en me présentant, on pouvait lire dans mes mots « I am from Africa », à la sortie les autres me disaient « Alioune, you said you'r from Africa but Africa is a continent », je leur ai répondu « Oh yes, but i feel like african » et vous m'aviez dit « Alioune, pas de politique! » Merci Philippe pour nos discussions sur l'avenir de la science dans ce continent.

S'il existe une personne à qui je dois ma formation de chercheur numérique, je citerai Frédéric GOLAY. Je tiens à lui exprimer mes remerciements, pour son enthousiasme, son implication presque quotidienne et sa grande disponibilité. Il m'a apporté une compréhension plus approfondie des divers aspects des modélisations utilisées dans la thèse. Sa patience et ses compétences sur les modèles et méthodes numériques et son sens de la pédagogie m'ont permis d'accomplir les missions qui m'ont été confié lors de cette thèse.

Je lui présente les témoignages de ma sincère reconnaissance. Ses connaissances scientifiques et sa capacité à les partager m'ont été très bénéfiques lors de la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier Richard MARCER d'avoir accepté ma demande de stage, il a 3 ans de cela, au sein de PRINCIPIA, stage qui m'avait permis de découvrir le domaine du calcul numérique et de faire une première approche avec les logiciels de simulation numérique. Je le remercie d'avoir mis à ma disposition des outils de travail de qualité pour le bon déroulement de cette thèse. Je le remercie aussi du temps, ingrédient qui lui est particulièrement précieux, qu'il m'a accordé.

Pour avoir fortement contribué à l'élaboration de cette thèse, je ne saurai oublier Christine De JOUETTE dont j'apprécie l'expertise et l'énergie tout autant que sa gentillesse.

Je présente les témoignages de ma sincère reconnaissance envers Damien SOUS. Son implication presque quotidienne et sa grande disponibilité ont fortement contribué à l'aboutissement de cette thèse. Merci Damien pour vos remarques pertinentes sur la physique des écoulements à surface qui ont toujours été très bénéfiques à l'avancement de mes travaux et pour la rédaction d'articles.

Si ce mémoire a été mené à bien, c'est grâce à leur aide précieuse, en tant que directeur de thèse et collaborateurs. Je leur remercie encore une fois de m'avoir soutenu, aidé et fait confiance tout au long de ce travail.

Je remercie vivement Vincent REY pour m'avoir permis d'enseigner, pendant la période de la thèse, à l'Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon-Var. Agréables sont les nombreux moments passés avec les étudiants.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Stéphan GRILLI et Mathieu MORY de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse. J'adresse mes remerciements à Philippe HELLUY pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury.

Mon dévouement dans les sciences mathématiques et mécanique était réconforté quand j'avais intégré MATMECA où on pouvait lire dans ses murs "Modéliser l'Avenir". Cette phrase simple affichée dans les murs de MATMECA est certainement justifiée surtout quand on lit le livre d'Isaac NEWTON "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Que mes anciens professeurs de cette école soient ici remerciés.

Mes trois années de thèse se sont déroulées aux laboratoires IMATH (Institut Mathématique de Toulon) et LSEET (Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement Terrestre) de l'université du Sud Toulon Var et de l'entreprise PRINCIPIA. Mes vifs remerciements vont à l'ensemble de leurs membres pour leur accueil chaleureux. Chacun des membres de ces deux laboratoires a favorisé le développement de mes recherches. Je prie à chacun des membres d'IMATH, de LSEET et de PRINCIPIA de croire à ma reconnaissance. Me sentant appartenir à ces trois structures, j'avais dû mal à répondre à une question à savoir: « Alioune, dans quelle laboratoire vous êtes? ».

Tout en leur exprimant collectivement ma gratitude, je tiens à mentionner et à remercier en particulier :

Charles AUDIFFREN et Benoît YERLY, mes deux collègues de bureau à PRINCIPIA, pour leur aide et pour leur gentillesse. Leur conseil m'est toujours été très précieux.

Merci à Didier MALLARINO, tu as toujours été là quand j'avais des problèmes avec les serveurs du laboratoire LSEET. Comment oublier Taty MISSAMOU et Marc FRANCIUS pour leurs conseils précieux et pour nos discussions scientifiques et philosophiques très enrichissantes. Avec eux j'ai partagé beaucoup de choses à l'intérieur et à l'extérieur du LSEET.

Merci à mon ami Lucio BELLOMO, mon ami thésard que j'ai côtoyé pendant ces 3 années de thèse. Merci à tous mes amis thésards. Diogone SYLLA, Jenna CHARLAND, j'oublierai jamais nos discussions intéressantes.

Je voudrais faire part de toute mon affection à Jacques SCHNEIDER, à Silvain MAIRE, à Lyudmila YUSHCHENKO et à Ersoy MEHMET pour leur présence et les moments qu'on a pu partager. Merci Jacques pour nos discussions intéressantes et qui ont eu un impact important dans mon cheminement philosophique.

Mes remerciements vont aussi aux personnes rencontrées en conférence et que je retrouverais toujours avec grand plaisir, plus particulièrement à mon ami Mazen Taha ABUALTAYEF, avec qui j'ai gardé un très grand souvenir.

Merci à Daouda SAMBE, si je pouvais imiter les deux frères Goncourt, je parlerai de moi en disant 'Nous' et tu seras l'autre moitié de ce 'Nous'. Tu es pour moi ce que Edmond était pour son frère Jules Goncourt.

Une pensée à tous mes amis qui m'ont permis de passer d'agréables années, en lisant ces quelques lignes de remerciements, mes amis stoïciens s'y reconnaîtront. Un mot en particulier pour Ibrahima Maty KANE, un ami et un frère, merci pour tes encouragements et conseils. Merci à Birame SAMBE (Let's talking about culture right now!), Moussa DIALLO (philosophy of « grant realities (al haqaa-iqal kubra)» right now !), à Hamza BANGUI (Mathematics right now!), à Zeinab WANGARA (compassion and spiritual right now !), à Malayka Marame DIENE (compassion right now !), à Moussa DIENE (meaning of life right now !), à Lamine BADJI (meaning of life right !), Moussa KOITA (history right now !), à Moussa DIOP (philosophy right now !), à Coumba MBODJ (Culture and politics right now !), à Loran BATIABO (metaphysics right now!), à François et Pascal LEONE (simplicity and spiritual right now !), à Celine MEREY (horses' life right now!), à Mouhamed DIENG, à Bara THIAM, à Cheikh NIAN, à Moussa WADE (science and genius of scientist right now!) et à Alioune DIOUM (economic right now!), de m'avoir supporté durant ces années. Maintenant, vous devez certainement connaître quelques aspects de la modélisation de l'impact des vagues sur des structures tant vous m'en avez entendu parler. Vous m'avez beaucoup apporté tant sur le plan humain que professionnel. KANE Diallo, j'oublierai jamais notre slogan en classe de terminal, quelle belle philosophie on avait même si notre logique n'était pas très développée!, une pensée à tous mes amis de TS1.

Merci à Herve De COLONGES et Joanna THOMSON, que je considère comme mes parents français!, pour vos nombreux conseils et invitations.

Enfin avec une soumission à l'infini et au nom de l'infini, je remercie infiniment mes parents, mes tantes, mes frères et sœurs pour m'avoir toujours aidé et encouragé. Je leur dédie, de tout cœur, cette thèse pour des milliers de raisons. Des mots ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers mes parents, je leur dis juste MERCI, « Dieureguenedieuf si séné takhaway ».

Mère, tu m'as toujours aidé et conseillé à poursuivre mes rêves et grâce à toi, mon cœur n'a jamais souffert. Ton enfant te remercie.

Père, toi qui as toujours travaillé la terre et toujours prêt à se sacrifier pour l'éducation de tes enfants, ton fils te remercie. Tu me disais toujours, Alioune, les études sont pour l'avidité du savoir, ce que les terres sont pour le cultivateur.

Dans ta vie, t'as semé une dizaine de graines arrosées tous les jours par quatre gouttes infinies et espérons que bientôt seront les temps de moisson et que les fruits de ces récoltes seront mis à la disposition de tout le monde par compassion. Certaines de ces graines ont donné naissance à des rosiers, ces rosiers ont fleuri et ont laissé leur parfum, hélas ils ont préféré partir tôt.

J'ai aussi une grande pensée envers mon grand père Alioune Nar SAMBE qui occupera toujours une place importante dans mon cœur et comme disait Cheikh Ahmed Tidiane SY, « tuer les morts c'est perdre son dernier sens de survie ». Grand père, ton petit fils et homonyme te remercie. Que tous ceux que je n'ai pas cités par manque de place dans ces quelques lignes me pardonnent et qu'ils soient ici remerciés.

Tous, je vous remercie.

Résumé du sujet de thèse

L'hydrodynamique offshore et côtière constitue une des activités majeures de PRINCIPIA. L'entreprise a développé des compétences sur le développement de modèles numériques pour la simulation de problèmes de mécanique des fluides et d'interactions fluide-structure en milieu marin, plus particulièrement: l'étude des courants côtiers dans la zone de déferlement et de leur impact sur le transport sédimentaire, l'érosion de plages, l'étude d'impacts de rejets d'émissaire ou d'ouvrages côtiers et la prédiction des efforts des vagues sur les structures offshore ou côtières.

Dans l'axe de développement de ses activités en hydrodynamique sur la prédiction des efforts des vagues sur les structures offshore ou côtières, un code de mécanique des fluides est développé en collaboration active avec le milieu universitaire régional (LSEET, IMATH, Université du Sud Toulon-Var) pour réaliser un logiciel de simulation numérique 3D performant qui pourra être utilisé en tant qu'outil opérationnel de prévision d'impact de vagues.

La modélisation de vagues et de leur impact côtier et offshore (déferlement, interactions avec les structures, tsunami) reste un problème difficile à appréhender du fait de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. Dans cette thématique, une étude numérique des processus physiques est effectuée dans le cadre de cette thèse.

L'objectif de la thèse est ainsi d'améliorer le domaine de validité du code en y développant des méthodes numériques performantes qui permettraient une grande précision des résultats des simulations et des gains en temps de calcul.

Le modèle numérique utilisé repose sur les équations d'Euler 3D multi-fluides. Une méthode de compressibilité artificielle permet une approche explicite et une parallélisation efficace. Le modèle bi-fluide à faible Mach, déjà validé avec des données expérimentales, repose sur une approximation par volumes finis avec un schéma de Godunov du second ordre en temps et en espace.

Dans le cadre de nos travaux, une modification de la technique d'intégration en temps du solveur basée sur l'intégration d'Adams-Bashforth multi-pas avec une approche multi-échelle dans laquelle le pas de temps est ajusté à la taille locale du maillage et une méthode de compression d'interface pour une meilleure précision de l'interface entre les fluides sont implémentées dans le code.

Ces méthodes numériques ont été validées avec des mesures expérimentales dans le cas d'un déferlement 2D et de la rupture 3D de barrage avec obstacle. Des comparaisons expérimentales et numériques ont permis de constater la pertinence des développements apportés au logiciel avec une amélioration de la précision des résultats et une diminution des temps de calcul.

Mots-clés: vagues, interaction fluide-structure, impact, multi-fluides, bi-fluides, faible Mach, Adams-Bashforth, multi-pas, multi-échelle, volumes finis, Godunov, compression d'interface, compressibilité artificielle, déferlement.

Summary

Title: Development of 3D solver for simulation of wave impact on coastal and offshore area

The offshore and coastal hydrodynamics is a major activity of PRINCIPIA. This engineering company has developed a recognized expertise on the development of numerical models for simulating problems of fluid mechanics and fluid-structure interaction in the marine environment, specifically: the prediction of waves' impact on coastal or offshore structures, the study of coastal currents in the surf zone and their impact on sediment transport and beach erosion, the impact of effluent discharges or any coastal structures. In this context, PRINCIPIA develops its own code of Fluid Mechanics (called EOLE) and is continuously modified by incorporating models of increasingly powerful and representative of the physical phenomena. Some software developments are done in collaboration with the academic area (LSEET, IMATH and the University of Toulon) with which many doctoral theses have already been made.

Modelling of waves and their impact coastal and offshore (wave, interaction with structures, Tsunami) remains a difficult problem because of the complexity of the physical phenomena involved.

The aim of the thesis is thus to improve the field validity for the CFD(Computational Fluid Dynamics) code for waves modelling, by integrating new numerical methods more efficient. The project should eventually lead to make a powerful simulation tool that can be used for forecasting the impact of waves in coastal areas and offshore. It is therefore completely in line with PRINCIPIA development activities in hydrodynamic with the aim of strengthening its position and support its growth.

In this paper, we first focus on the specific problem of numerical diffusion for the convection equation that models the two fluid interface discontinuities.

Interface compression methods allowing limiting the interface diffusion problem are presented. The main advantages of these compression methods are that they keep properly the interface and minimize the spurious free surface diffusion which may be beneficial in case of strongly nonlinear motion of the free surface. Moreover, they are easy to implement for problems in two or three dimensions.

In the other hand, an improvement of the solver is presented; it concerns the development and validation of the Adams-Bashforth multi-scale time integration method which adjusts the time step depending on the local size cell. The advantage of this method is that it significantly reduces the computation time when small cells are mixed with large cells in the mesh domain [Altman *et al.*, 2009]. Each cell is assigned with a level of CFL only based on a geometric criterion.

The improved model is validated. It is confronted with experimental results of 2D solitary wave breaking on a sloping bottom and the 3D dam break problem over a rectangular obstacle. In both cases, a very satisfactory agreement is found, with a better interface definition with the sharpening method and a significant gain in CPU time with Adams-Bashforth multi-scale time integration method.

Keywords: Wave breaking, coastal structures, finite volume, Godunov scheme, air-water interface sharpening, dambreak problem, Adams-Bashforth, multi-scale, CFL.

Table des matières

1.	LA MODELISATION DE L'IMPACT HYDRODYNAMIQUE DES VAGUES	28
1.1	Contexte industriel et environnemental.....	28
1.2	Intérêts de la modélisation mathématique et numérique	30
1.3	Phénomènes physiques mis en jeu	30
1.3.1	Interactions vagues-structures	31
1.3.2	Inondation induite par un tsunami.....	32
1.4	Modèles mathématiques.....	32
1.4.1	Les modèles de Navier-Stokes	33
1.4.2	Les modèles de type «Shallow water» ou eaux peu profondes.....	34
1.4.3	Les modèles de la théorie des écoulements à potentiel	35
1.4.4	Les modèles SPH	36
1.5	Modèles numériques multi-fluides.....	38
1.5.1	Méthodes «Marker And Cell».....	38
1.5.2	Méthodes «Front Tracking»	39
1.5.3	Méthodes «Volume of Fluid»	39
1.5.4	Méthodes «Level Set».....	40
1.5.5	Modèle de capture d'interface.....	41
1.5.5.1	Modèles à 5 équations	42
1.5.5.2	Modèles à 6 équations	43
1.5.5.3	Modèles à 7 équations	44
1.5.6	La présente méthode.....	45
2.	LE MODELE BI-FLUIDE FAIBLE MACH.....	47
2.1	Hypothèses:	47
2.1.1	La modélisation de la surface libre	48
2.1.2	Approximation faible nombre de Mach	48
2.1.3	Le modèle Euler bi-fluide compressible	48
2.1.4	Les lois de pression	50
2.1.4.1	Cas isotherme	50
2.1.4.2	Cas énergétique	51
2.2	Approximation volumes finis.....	52
2.2.1	Le problème de Riemann	52
2.2.2	Discrétisation spatiale	54
2.2.3	Discrétisation temporelle.....	56
2.2.3.1	Les schémas de Godunov	56
2.2.3.2	Précision d'ordre 2 en temps et en espace.....	57
2.2.3.3	Le schéma non conservatif.....	59
2.3	Le code de calcul.....	62
3.	LES METHODES NUMERIQUES MULTI-PAS	67
3.1	Les méthodes numériques à un pas	67
3.2	Approche multi-pas, cas général	69
3.3	La méthode d'Adams-Bashforth	70
3.4	Algorithme de l'approche multi-pas	72

4.	LES METHODES D'ADAMS-BASHFORTH MULTI-ECHELLE	75
4.1	Modèle numérique.....	76
4.2	Résolution numérique de la méthode	78
4.3	Algorithme de l'approche multi-échelle	79
4.4	Exemple avec trois cellules	81
5.	LES TECHNIQUES DE COMPRESSION D'INTERFACE	83
5.1	La méthode de Kaceniauskas	84
5.2	La méthode de Olsson	84
5.3	La méthode de Kokh	85
5.4	Choix d'une méthode de compression	86
5.5	Résolution numérique de la méthode de Kokh	87
5.6	Algorithme et programmation de la méthode	88
6.	VALIDATION	93
6.1	Validation de la méthode d'Adams-Bashforth par le tube à choc.....	93
6.2	Validation de la méthode multi-échelle	96
6.2.1	Cas du tube à choc.....	96
6.2.1.1	Description des différents types de maillages	96
6.2.1.2	Resultats	98
6.2.1.2.1	Précisions	101
6.2.1.2.2	Temps de calcul.....	101
6.2.2	Propagation d'une onde solitaire	102
6.3	Validation de la méthode de raidissement d'interface	104
6.3.1	Propagation d'une onde solitaire	104
6.3.2	Influence du coefficient de compression.....	108
6.4	Conclusion.....	112
7.	QUELQUES APPLICATIONS	113
7.1	Propagation et déferlement 2D d'une vague sur une plage.....	113
7.2	Propagation et déferlement 2D d'une vague avec macro-rugosités	120
7.2.1	Description des différents cas tests	120
7.2.2	Resultats avec une pente lisse	121
7.2.3	Influence des macros rugosités sur le déferlement de vague	125
7.2.3.1	Comparaison entre les cas avec ou sans macro-rugosités	125
7.2.3.1.1	Dynamique du déferlement	125
7.2.3.1.2	Champs de vorticité	125
7.2.3.1.3	Conclusion.....	126
7.2.3.2	Etude paramétrique	130
7.2.3.2.1	Influence de la distance de séparation des macro-rugosités.....	130
7.2.3.2.2	Influence de la hauteur des macro-rugosités	130
7.2.3.2.3	Analyse adimensionnée.....	131
7.2.4	Conclusion.....	137
7.3	Analyses numériques d'un déferlement 3D de vague en zone côtière	137
7.3.1	Description du cas d'étude et des caractéristiques de la simulation	137
7.3.2	Résultats numériques.....	139
7.3.2.1	Dynamique du déferlement	139
	Profil de la surface libre	146
7.3.2.2	146
7.4	Rupture de barrage 3D en présence d'obstacle.....	149

7.4.1	Géométrie et caractéristiques des simulations	149
7.4.2	Maillage.....	150
7.4.3	Conditions initiales et conditions aux limites	150
7.4.4	Emplacements des sondes	151
7.4.5	Simulations et comparaisons expérimentales.....	152
7.4.5.1	Dynamique de l'écoulement.....	152
7.4.5.2	Comparaisons qualitatives pour la surface libre	159
7.4.5.3	Evolution temporelle de la surface libre	160
7.4.5.4	Evolution temporelle de la pression	162
7.4.5.5	Sensibilité à la vitesse du son artificielle	163
7.4.5.6	Apport de la compression.....	165
7.4.5.7	Comparaison avec des codes de laboratoire.....	167
7.4.5.8	Conclusion.....	170
8.	ANNEXES: COMPARAISONS DU CODE AVEC FLUENT D'ANSYS.....	189
8.1	Introduction	189
8.2	Le modèle bi-fluide de Fluent	189
8.3	Le modèle numérique de Fluent.....	191
8.4	Résultats	191
8.5	Comparaison avec le modèle Euler bi-fluide	198

Table des figures

Fig.1.1	: Plateforme pétrolière endommagée par l'ouragan Dennis	28
Fig.1.2	: Le tsunami dévastateur du Japon (http://club.doctissimo.fr)	29
Fig.1.3	: Modèles Shallow water: Elévation de la surface libre	34
Fig.1.4	: Modèles SPH: Voisinage d'un nœud i du domaine d'étude	37
Fig.1.5	: Representation de l'interface pour la méthode VOF.....	40
Fig.1.6	: Representation de l'interface pour la méthode Level Set	41
Fig.2.1	: Problème de Riemann: Solution dans le plan (x, t)	54
Fig.2.2	: Discrétisation spatiale: Maillage volumes finis 2D et 3D	55
Fig.2.3	: Tube à choc: Profil de la pression avec le schéma de Godunov, exact (ligne), numérique (pointillé) [Golay et Helluy, 2007a]	59
Fig.2.4	: Tube à choc: Profil de la pression avec le schéma non conservatif de Saurel- Abgrall, exact (ligne), numérique (pointillé) [Golay et Helluy, 2007a]	62
Fig.4.1	: Approche multi-échelle: Exemple de hiérarchie de maillage	76
Fig.4.2	: Approche multi-échelle: Maillage et niveaux de CFL	81
Fig.5.1	: Compression d'interface: Interface avec diffusion numérique	83
Fig.6.1	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M1	94
Fig.6.2	: Tube à choc: Champs de pression, maillage M1	94
Fig.6.4	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M2	95
Fig.6.5	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M3	95
Fig.6.6	: Tube à choc: Niveaux de CFL, maillage M4	97
Fig.6.7	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M4, niveau=1	99
Fig.6.8	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M4, niveau=1	99
Fig.6.9	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M6, niveau=3	99
Fig.6.10	: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M7, niveau=6	100
Fig.6.11	: Propagation d'onde: Initialisation pour la densité	102
Fig.6.12	: Propagation d'onde: Maillage du domaine de calcul	103
Fig.6.13	: Propagation d'onde: Raffinement et Niveaux de CFL	103
Fig.6.14	: Propagation d'onde: Profil de la surface libre à $t=0, 0.5s, 1.0s, 1.5s, 2.0s, 2.5s$	103
Fig.6.15	: Propagation d'onde: Vitesse (droite) et vorticité horizontale (gauche) à l'initialisation	105
Fig.6.16	: Propagation d'onde: Densité avec AB2(gauche) et AB2C(droite) à $t=2.5s$	105
Fig.6.17	: Propagation d'onde: Vitesse horizontale avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) à $t=2.5s$ et profil de la surface libre	106
Fig.6.18	: Propagation d'onde: Vorticité horizontale avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) à $t=2.5s$ et profil de la surface libre	106
Fig.6.19	: Propagation d'onde: Profil de la surface libre avec AB2C (rouge) et AB2 (bleu) à $t=0.s, 0.5s, 1.0s, 1.5s, 2.0s, 2.5s$	106
Fig.6.20	: Propagation d'onde: Evolution de la masse totale avec AB2C (rouge) et AB2 (bleu) pour $t=0, 2s$	107
Fig.6.21	: Propagation d'onde: Profil de la surface libre avec AB2C et AB2 pour $\eta=1, 0.5,$ $0.25, 0.125, 0.0625, 0.01, t=0s; 0.5s; 1.s; 1.5s; 2.s; 2.5s.$	109
Fig.6.22	: Propagation d'onde: Amplitude du soliton en fonction du taux de compression à $t= 2.s.$	109

Fig.6.23	: Propagation d'onde: Evolution de la masse totale avec AB2C et AB2 pour $\eta=1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.01, t=0.s \text{ à } 2.5s.$	110
Fig.6.24	: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0 \text{ à } t=0s, 2.0s.$	110
Fig.6.25	: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.01, 0.0625 \text{ à } t=2.0s$	111
Fig.6.26	: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.125, 0.25 \text{ à } t=2.0s$	111
Fig.6.27	: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.5, 1.0 \text{ à } t=2.0s$	111
Fig.7.1	: Déferlement de vague 2D: Conditions initiales	113
Fig.7.2	: Déferlement de vague 2D: Géométrie et niveaux de taille de maille	114
Fig.7.3	: Déferlement de vague 2D: Décomposition du domaine de calcul pour l'utilisation de MPI et maillage	114
Fig.7.4	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t=2.97s$ avec AB2 (gauche) et AB2C. Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.	115
Fig.7.5	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t=3.15s$ avec AB2 (gauche) et AB2C. Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.	115
Fig.7.6	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t=3.31s$ avec AB2 (gauche) et AB2C. Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.	116
Fig.7.7	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t=3.45s$ avec AB2 (gauche) et AB2C. Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.	116
Fig.7.8	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: champs de vitesse à $t=2.97s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre	117
Fig.7.9	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: champs de vitesse à $t=3.15s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre	117
Fig.7.10	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: vecteur vitesse à $t=3.31s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre	118
Fig.7.11	: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: vecteur vitesse à $t=3.45s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre	118
Fig.7.12	: Déferlement de vague 2D: Profil de la surface libre à $t=2.97s; 3.15s.$ Comparaison de la présente simulation AB2C(verte) avec l'expérience	119
Fig.7.13	: Déferlement de vague 2D: Profil de la surface libre à $t=3.31s; 3.45s.$ Comparaison de la présente simulation AB2C(verte) avec l'expérience	119
Fig.7.14	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Conditions initiales et géométrie	120
Fig.7.15	: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Densité dans le Cas H00D00 à $t=0s, 2.0s, 2.5s, 3.s, 3.25s, 3.5s.$	122
Fig.7.16	: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Vorticité horizontale dans le cas H00D00 à $t=0s, 2.s, 2.25s, 3s, 3.25s, 3.s$ et profil de la surface libre	123
Fig.7.17	: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Surface libre $\phi=0.5$ dans le cas H00D00 à $t=1.25s, 1.5s, 1.75s, 2.0s, 2.25s.$	124
Fig.7.18	: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Surface libre $\phi=0.5$ dans le cas H00D00 à $t=2.5s, 2.75s, 3.0s, 3.25s, 3.5s.$	124
Fig.7.19	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Surface libre. Comparaison entre les cas H00D00 et H02D08 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.0s.$	127
Fig.7.20	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H02D08 à $t=0s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.s.$	128
Fig.7.21	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Vorticité horizontale dans le cas H02D08 à $t=0s, 2.s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.s$ et profil de la surface libre	129
Fig.7.22	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la distance entre les éléments de macro-rugosités: Surface libre $\phi=0.5$. Comparaison entre les cas H00D00, H02D04, H02D08, H02D08 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 3.0s.$	132

Fig.7.23	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la distance entre les éléments de macro-rugosités: Vorticité horizontale. Comparaison entre les cas H02D04 (haut) et H02D08 (bas) à $t=2.25s$ et profil de la surface libre	133
Fig.7.24	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la hauteur des éléments de macro-rugosités: Surface libre $\varphi=0.5$. Comparaison entre les cas H00D00, H01D04, H02D04, H03D04 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.0s$.	134
Fig.7.25	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H01D04 à $t=0s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.s$.	135
Fig.7.26	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H03D04 à $t=0s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.s$.	136
Fig.7.27	: Déferlement de vague 3D: Géométrie du domaine	138
Fig.7.28	: Déferlement de vague 3D: Conditions initiales	139
Fig.7.29	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=0.25s$. $\varphi=0.5$	140
Fig.7.30	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=1.75s$. $\varphi=0.5$	141
Fig.7.31	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=2.25s$. $\varphi=0.5$	141
Fig.7.32	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=2.5s$. $\varphi=0.5$	142
Fig.7.33	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=2.75s$. $\varphi=0.5$	142
Fig.7.34	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3s$. $\varphi=0.5$	143
Fig.7.35	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.25s$. $\varphi=0.5$	143
Fig.7.36	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.5s$. $\varphi=0.5$	144
Fig.7.37	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.75s$. $\varphi=0.5$	144
Fig.7.38	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4s$. $\varphi=0.5$	145
Fig.7.39	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4.25s$. $\varphi=0.5$	145
Fig.7.40	: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4.5s$. $\varphi=0.5$	146
Fig.7.41	: Déferlement de vague 3D: Emplacements des points pour la pression et pour l'amplitude de la hauteur d'eau.	146
Fig.7.42	: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P1, P2, P3, P4, P5 et P6	147
Fig.7.43	: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P8, P9, P10 et P11	148
Fig.7.44	: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P12, P13, et P14	148
Fig.7.45	: Dambreak 3D: Visualisation dans le plan (x, y)	149
Fig.7.46	: Dambreak 3D: Visualisation dans le plan (x, z)	150
Fig.7.47	: Dambreak 3D: Niveaux de raffinement du maillage	150
Fig.7.48	: Dambreak 3D: Initialisation	151
Fig.7.49	: Dambreak 3D: Description de la géométrie 3D avec les emplacements des sondes pour les mesures de la pression et de l'amplitude de la hauteur d'eau.	152
Fig.7.50	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.25s$. $\varphi=0.5$	152
Fig.7.51	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.43s$. $\varphi=0.5$	153
Fig.7.52	: Dambreak 3D: Vitesse horizontale au moment de l'impact à $t=0.43s$.	153
Fig.7.53	: Dambreak 3D: Pression au moment de l'impact $t=0.43s$.	154
Fig.7.54	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.66s$. $\varphi=0.5$	154
Fig.7.55	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=1.06s$. $\varphi=0.5$	155
Fig.7.56	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=1.44s$. $\varphi=0.5$	155
Fig.7.57	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=2.15s$. $\varphi=0.5$	156
Fig.7.58	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=2.9s$. $\varphi=0.5$	156
Fig.7.59	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=3.59s$. $\varphi=0.5$	157
Fig.7.60	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=4.14s$. $\varphi=0.5$	157
Fig.7.61	: Dambreak 3D: Surface libre à $t=5.24s$. $\varphi=0.5$	158

Fig.7.62	: Dambreak 3D: Surface libre à $t = 5.5s$. $\phi = 0.5$	158
Fig.7.63	: Dambreak 3D: Surface libre à $t = 0.4s$. Comparaison entre les résultats numériques de Kleefsman (droite), l'expérience (milieu) et la présente simulation.	159
Fig.7.64	: Dambreak 3D: Surface libre à $t = 0.56s$. Comparaison entre les résultats numériques de Kleefsman (droite), l'expérience (milieu) et la présente simulation.	159
Fig.7.65	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau à la sonde H2. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).	160
Fig.7.66	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau à la sonde H4. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).	161
Fig.7.67	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P1. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).	162
Fig.7.68	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P7. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).	162
Fig.7.69	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison de la présente simulation avec l'expérience (rouge). La méthode de compression avec une vitesse de son artificielle de 20m/s est représentée en bleu et en vert pour une vitesse de 10m/s.	164
Fig.7.70	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison de la présente simulation avec l'expérience (rouge). La méthode de compression avec une vitesse de son artificielle de 20m/s est représentée en bleu et en vert pour une vitesse de 10m/s.	165
Fig.7.71	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge) et la présente simulation avec compression (bleu) et sans compression (vert).	166
Fig.7.72	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge) et la présente simulation avec compression (bleu) et sans compression (vert).	166
Fig.7.73	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Kleefsman (bleu) et la présente simulation (vert).	168
Fig.7.74	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Kleefsman (bleu) et la présente simulation (vert).	168
Fig.7.75	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Vincent (noire) et la présente simulation (vert).	169
Fig.7.76	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P1. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Vincent (noire) et la présente simulation (vert).	169
Fig.7.77	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Initialisation. Surface libre. $\phi \geq 0.5$	192
Fig.7.78	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.35s$. $\phi \geq 0.5$	192
Fig.7.79	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.43s$. $\phi \geq 0.5$	193
Fig.7.80	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.50s$. $\phi \geq 0.5$	193
Fig.7.81	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.65s$. $\phi \geq 0.5$	194
Fig.7.82	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.72s$. $\phi \geq 0.5$	194
Fig.7.83	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.88s$. $\phi \geq 0.5$	195
Fig.7.84	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 0.98s$. $\phi \geq 0.5$	195

Fig.7.85	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 1.04s$. $\varphi \geq 0.5$	196
Fig.7.86	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 1.5s$. $\varphi \geq 0.5$	196
Fig.7.87	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 2.88s$. $\varphi \geq 0.5$	197
Fig.7.88	: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t = 3.28s$. $\varphi \geq 0.5$	197
Fig.7.89	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques avec Fluent CFD (bleu) et la présente simulation (vert).	198
Fig.7.90	: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques avec Fluent CFD (bleu) et la présente simulation (vert).	199

Liste des tableaux

Tab.2.1	: Tube à choc: Conditions aux limites	59
Tab.4.1	: Approche multi-échelle: Test et Exemple	81
Tab.6.1	: Tube à choc: Conditions aux limites	93
Tab.6.2	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M1	94
Tab.6.3	: Tube à choc: Définition du maillage M4	97
Tab.6.4	: Tube à choc: Définition du maillage M6	97
Tab.6.5	: Tube à choc: Définition du maillage M7	97
Tab.6.6	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M4, niveau=1	100
Tab.6.7	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M4, niveau=1	100
Tab.6.8	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M6, niveau=3	100
Tab.6.9	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M6, niveau=3	100
Tab.6.10	: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M7, niveau=6	101
Tab.6.11	: Propagation d'onde: Temps CPU et erreur de calcul, niveau=1	104
Tab.6.12	: Propagation d'onde: Conservation de la masse: Erreur relative	107
Tab.6.13	: Propagation d'onde: Conservation de la masse: Erreur pour différents η	110
Tab.7.1	: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Description des cas tests.....	121
Tab.7.2	: Dambreak 3D: Dimension du réservoir et de l'obstacle	149

Introduction

La dynamique des vagues et leur impact est un phénomène important dans les milieux littoraux et océaniques. C'est un mécanisme assez complexe et un paramètre essentiel qui joue sur la morphodynamique des plages et la tenue des structures côtières.

Comme les vagues se propagent jusqu'à la rive, leur dynamique relativement bien organisée au large des côtes se transforme en une vaste gamme de mouvements de différents types et d'échelles, voir par exemple [Hamm *et al.*, 1993].

D'importants efforts de recherche, soutenus pendant plusieurs décennies, ont apporté beaucoup de perspicacité à la connaissance de la dynamique de ces ondes en zone de surf, largement affectée par le déferlement de vagues ([Peregrine, 1983], [Battjes, 1988], [Svendsen et Putrevu, 1996] et [Christensen, 2006]).

Le Déferlement de vague est généralement le phénomène dominant dans la transformation de l'énergie de la vague à proximité des côtes. Il semble donc primordial d'améliorer les capacités de prévision des déferlements. En particulier, la cinématique de l'impact et le "run-up" sur les structures offshores et sur les plages sont extrêmement importants dans le cas d'événements dangereux comme les ondes de tempêtes ou par exemple les tsunamis. La communauté scientifique est maintenant consciente de la protection que peuvent offrir certains obstacles naturels (récifs coralliens, rochers, mangroves) ou d'ingénierie (bâtiments, blocs de béton) sur ces catastrophes. Ces obstacles peuvent réduire l'impact mécanique des tsunamis.

Des travaux de recherche ont récemment été engagés pour quantifier l'efficacité de ces barrières dans l'atténuation des effets dévastateurs en zones côtières par exemple dans [Fernando *et al.*, 2008]. Dans ce contexte et dans le cadre du programme ANR-TSUMOD, la présente étude vise aussi à analyser par simulation numérique les déferlements de vagues et leur impact sur des structures offshores ou sur des macro-rugosités (obstacles) sur un fond plan ou incliné. Les objectifs du projet TSUMOD étaient d'améliorer et de développer de nouvelles méthodes numériques dans le domaine de la simulation des tsunamis afin d'accroître les connaissances actuelles liées à ces phénomènes.

En revanche la forte influence du fond rugueux, due à la présence de macro-rugosités produit des modifications du champ d'écoulement, à savoir des accélérations et décélérations, jusqu'à la surface libre.

Outre les améliorations numériques en termes de précision et de gain en temps CPU, un de nos objectifs est de comprendre comment les éléments de rugosité ou les structures offshores auront une incidence sur la dynamique du déferlement, sur la dissipation d'énergie et la hauteur du "run-up".

Différentes approches sont généralement utilisées pour la modélisation numérique de ces phénomènes physiques se produisant dans la zone de surf. Parmi ces approches, on trouve d'abord, les modèles basés sur les équations de Boussinesq ([Skotnera et Apeltb, 1999], [Mil-Homens *et al.*, 2010], [Fuhrman et Madsen, 2008], [Dutykh, 2007]) ou sur la théorie potentielle ([Longuet-Higgins et Cokelet, 1976], [Faltinsen, 1977], [Vinje et Brevig, 1981], [Lin *et al.*, 1984], [Ferrant, 1994], [Celebi *et al.*, 1998], [Grilli *et al.*, 1989], [Grilli *et al.*, 2001]) qui sont souvent utilisés. Ils sont très rapides (nécessitent peu de temps de calcul) mais peu pertinents lors du déferlement ([Grilli *et al.*, 1989] et [Grilli *et al.*, 2001]). D'autre part, les solveurs classiques de Navier-Stokes incompressibles donnent des résultats pertinents, précis tout au long du processus mais coûtent très chers au niveau des temps CPU ([Lin et Liu, 1998a], [Vincent *et al.*, 2004], [Guignard *et al.*, 2001], [Biausser *et al.*, 2004], [Braconnier *et*

al., 2009], [Zhao *et al.*, 2004] et [Horrrillo *et al.*, 2006]). De plus, le phénomène de déferlement est un processus très complexe, impliquant la turbulence de l'écoulement avec une grande variété de longueur d'échelle et un fort mélange entre l'air et l'eau. La description détaillée de la physique en trois dimensions avec la dissipation visqueuse, la turbulence et les effets de tension superficielle conduit souvent, elle aussi, à des temps de calcul drastiques sur des ordinateurs standards, voir par exemple [Fuster *et al.*, 2009]. De même, il a été démontré que les méthodes SPH sur les problèmes 3D conduisent à des temps de calcul encore plus prohibitifs [Khayyer et Gotoh, 2009].

Visant un compromis efficace entre coûts de calcul et pertinence physique, une autre méthode numérique est reprise ici, c'est un modèle Euler bi-fluide où les équations de conservation sont résolues en introduisant une équation d'état en fonction de la fraction volumique de l'eau et de l'air ([Chanteperdrix *et al.*, 2002], [Saurel et Abgrall, 1999a]), transportée sans suivi d'interface. Une méthode de compressibilité artificielle permet une résolution explicite permettant une mise en œuvre d'une parallélisation efficace.

Ce modèle bi-fluide à faible nombre de Mach, conduit à un système hyperbolique de lois de conservation résolu par une approximation volumes finis avec un schéma de Godunov du second ordre en temps et en espace [Golay et Helluy, 2007a]. Ce modèle a été validé avec les mesures expérimentales de [Yasuda *et al.*, 1997] avec une bonne performance en temps de calcul [Helluy *et al.*, 2005].

Nous présenterons dans ce mémoire, des améliorations de ce schéma numérique. Dans un premier temps nous aborderons l'étude de la modification de la technique d'intégration en temps du solveur basée sur l'intégration d'Adams-Bashforth multi-pas, dans laquelle le pas de temps est ajusté à la taille locale du maillage. Cette technique est particulièrement efficace dans le cas où le maillage présente une grande disparité de taille de maille [Altmann *et al.*, 2009]. Ensuite, nous présenterons le problème de la diffusion de l'interface. Nous chercherons alors à diminuer la diffusion numérique de l'interface par l'utilisation d'une méthode de compression ou de raidissement. Le but sera de conserver une interface fine sans avoir recours à des techniques de reconstruction d'interface comme les méthodes VOF [Kokh, 2001].

Ce mémoire est composé de sept chapitres.

Dans le premier chapitre on présentera, pour une meilleure compréhension des modèles utilisés pour simuler les écoulements bi ou multi-fluides, l'état de l'art sur la modélisation des impacts de vagues et le contexte environnemental et industriel de ce travail. Ce chapitre traite différents aspects de la modélisation du déferlement de vagues et tsunamis.

Différentes approches physiques, mathématiques et numériques y seront abordées. Parmi les approches mathématiques, on présentera l'approche classique de Navier-Stokes, les modèles de types Shallow water (eaux peu profondes ou Saint-Venant), les équations basées sur la théorie potentielle ainsi que la méthode SPH (Smoothed-particle hydrodynamics) qui est une méthode mixte physique /numérique. On décrira très rapidement certaines méthodes numériques pour les écoulements multi-fluides et multiphasiques les plus utilisées dans la littérature actuelle, comme par exemple les méthodes de suivis d'interface Level set et VOF (Volume Of Fluid).

Le deuxième chapitre sera axé sur la modélisation des écoulements diphasiques utilisant l'approche de la compressibilité artificielle. Les équations de la dynamique des fluides avec les lois complémentaires et les différents schémas pour leur approximation seront étudiées.

Le troisième chapitre sera consacré aux développements réalisés lors de cette thèse et à une description des techniques d'intégration en temps du solveur basée sur l'intégration d'Adams-

Bashforth multi-pas. Dans ce chapitre, on propose une méthode numérique qui permet de résoudre les équations d'Euler et qui est nécessaire pour une approche multi-échelle.

Dans le quatrième chapitre, on étudiera le schéma d'Adams-Bashforth multi-pas avec l'introduction d'un pas de temps local. Nous partirons de la méthode numérique décrite précédemment et apporterons une modification basée sur une approche multi-échelle dans laquelle le pas de temps est ajusté à la taille locale du maillage.

Dans le cinquième chapitre nous nous concentrerons sur le problème spécifique de la diffusion numérique près des discontinuités de contact pour l'équation de convection qui modélise l'évolution de l'interface dans le cas bi fluide. Des modèles existants de compression d'interface seront présentés et une étude particulière sera faite avec la méthode [Kokh, 2001], méthode qui a été implémentée dans le solveur pour augmenter la précision de l'interface.

Dans le sixième chapitre, nous validerons ces approches sur un certain nombre de cas notamment dans le cas du tube à choc et dans le cas du déferlement de vague. Plusieurs types de maillages ont été envisagés permettant d'évaluer la pertinence de la méthode d'intégration multi-échelle.

Le chapitre sept décrit les applications du modèle. Quelques cas illustratifs seront présentés. Les premiers cas concerneront des études de déferlement 2D de vagues sur une pente avec des macro-rugosités, ensuite le modèle numérique sera utilisé pour une étude numérique d'un déferlement 3D de vague en zone côtière et offshore.

Enfin un problème de rupture de barrage 3D avec obstacle sera étudié, les résultats de calcul seront comparés avec ceux expérimentaux et numériques de Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005] et de Vincent et al. [Vincent *et al.*, 2010].

Les travaux présentés dans ce mémoire et lors de la thèse ont fait l'objet des communications suivantes:

Articles en revues internationales avec comité de lecture:

-Mazen Taha Abualtayef, Masamitsu Kuroiwa, Ahmed Khaled Seif, Yuhei Matsubara, Ahmed M. Aly, Ahmed A. Sayed, Alioune Nar Sambe , Development of a three dimensional circulation model based on fractional step method, International Journal of Naval Architecture And Ocean Engineering, Vol.2, 2010, pp. 14-23.

-A. Nar Sambe, F. Golay, P. Fraunie, D. Sous, V. Rey, R. Marcer, C. De Jouette, Two phases flow unstructured grid solver: Application to tsunami wave impact, International Journal of Offshore and Polar Engineering , Vol. 21, No. 3, Septembre 2011, pp. 186–191.

-Sambe A. Nar, Sous D., Golay F., Fraunié P., Marcer R., Numerical wave breaking with macro-roughness, European Journal of Mechanics, B Fluids, Vol. 30, No. 6, Novembre 2011, pp. 577-588.

Communications lors de conférences:

-A. Nar Sambe, F. Golay, P. Fraunie, D. Sous, V. Rey, R. Marcer, C. De Jouette, Two phases flow unstructured grid solver: Application to tsunami wave impact, Nineteenth International Offshore and Polar Engineering (ISOPE), Osaka, Japan, June-21-26, 2009.

-A. Nar Sambe, F. Golay, P. Fraunie, D. Sous, V. Rey, R. Marcer, C. De Jouette, Ecoulement bi-fluide: application à l'impact d'une vague solitaire, 19 ème Congres Français de Mécanique, Marseille, France, 24 -28 Août, 2009.

-A. Nar Sambe, Modélisation de l'impact des tsunamis, Doctoriades euro-méditerranéennes Journées de la Jeune Recherche de l'Université du Sud Toulon-Var, La Garde, France, 1-2 Octobre, 2009.

-A. Nar Sambe, Modélisation de l'impact d'un Tsunami sur une plage en présence de macro rugosités, Doctoriades euro-méditerranéennes Journées de la Jeune Recherche de l'Université du Sud Toulon-Var, Toulon, France, 7-8 Décembre, 2010.

-A. Nar Sambe, D. Sous, F. Golay, P. Fraunie, V. Rey, R. Marcer, Effect of macro-roughness on solitary wave breaking, European Geophysical Union (EGU), Vienne, Autriche, Mai 02-07, 2010.

-Sambe A. Nar, Golay F., Marcer R., Sous D., Fraunie P., 3D Solver for Two Phases Flows Unstructured Grid: Application to Wave Impact on Structures, 21st International Offshore and Polar Engineering (ISOPE), Maui, Hawaii, USA, June-19-24, 2011.

-A. Nar Sambe, F. Golay, D. Sous, P. Fraunie, R. Marcer, Déferlement de vague: approche multi-pas, 20 ème Congres Français de Mécanique, Besançon, France, 28 Aout - 2 Septembre, 2011.

Partie 1

Etude bibliographique sur la modélisation de l'impact hydrodynamique des vagues et sur les méthodes numériques pour les écoulements bi-fluides.

Table des matières

1.	LA MODELISATION DE L'IMPACT HYDRODYNAMIQUE DES VAGUES	28
1.1	Contexte industriel et environnemental.....	28
1.2	Intérêts de la modélisation mathématique et numérique.....	30
1.3	Phénomènes physiques mis en jeu	30
1.4	Modèles mathématiques.....	32
1.5	Modèles numériques multi-fluides.....	38
2.	LE MODELE BI-FLUIDE FAIBLE MACH.....	47
2.1	Hypothèses:	47
2.2	Approximation volumes finis.....	52
2.3	Le code de calcul.....	62

1. La modélisation de l'impact hydrodynamique des vagues

1.1 Contexte industriel et environnemental

Comme on l'a déjà évoqué précédemment, les vagues déferlantes sur des structures côtières et offshores peuvent causer de fortes pressions d'impact qui sont un paramètre important pour la stabilité de ces structures. Les plus fortes pressions d'impact sont obtenues lorsque le front de l'onde est quasi parallèle à la paroi de l'obstacle à l'instant d'impact ([Kirkgöz, 1995] et [Kirkgöz et Aköz, 2005]). Quand les vagues déferlent sur des digues, elles transfèrent brusquement une quantité de mouvement à la structure et produisent un impact de haute pression et aussi de courte durée [Kirkgöz et Mamak, 2004]. Ce transfert d'énergie est toujours spectaculaire et peut endommager les structures côtières ou offshores. La figure Fig.1.1 montre l'endommagement d'une plateforme pétrolière endommagée par l'Ouragan Dennis [Morgan, 2009] qui avait généré des vagues d'amplitudes importantes sur l'océan atlantique.



Fig.1.1: Plateforme pétrolière endommagée par l'ouragan Dennis
(<http://www.superstock.com>)

Au cours de ces dernières années, les dégâts croissants causés par les tsunamis sur les ouvrages maritimes nécessitent des approches complètes sur les réponses dynamiques des structures en tenant compte des incertitudes dans la variabilité des processus de déferlement des ondes et de leur impact. La prévision précise de l'impact hydrodynamique des vagues extrêmes, comme les tsunamis, est alors cruciale pour la conception de nombreux types de structures côtières. Des approches théoriques et numériques principalement concentrées sur l'évaluation des pressions d'impact sur les parois des structures ont été menées par plusieurs auteurs, notamment [Kirkgöz et Mamak, 2004].

L'effet tourbillonnaire de l'écoulement après impact est aussi à prendre en compte, car si une vague se retourne après avoir frappé un mur, de grandes quantités d'air peuvent être entraînées de sorte qu'on obtient un mélange turbulent d'air et d'eau. Dans ce cas, la compressibilité de l'air emprisonné ou entraîné aura une incidence sur la dynamique de l'onde et a souvent tendance à réduire la pression maximale en raison d'un effet d'amortissement. Des études sur l'influence de l'air ont été menées par plusieurs auteurs, voir par exemple [Bullock *et al.*, 2001], [Peregrine *et al.*, 2004] et [Plumerault, 2009]. Vu la complexité de ce phénomène physique qu'est le déferlement et la variabilité de la violence des impacts, beaucoup d'approches théoriques qui tentent de prévoir les pressions d'impact de vagues ont généralement échoué à donner des réponses raisonnables à des fins pratiques. Cependant l'impact des ondes non déferlantes est bien connu dans la littérature [Bullock *et al.*, 2007]. Pour remédier à cela, les performances des structures côtières sont souvent étudiées avec des modèles d'hydrauliques de laboratoire en introduisant l'effet échelle.



Fig.1.2: Le tsunami dévastateur du Japon (<http://club.doctissimo.fr>)

Dans les régions côtières, de longues vagues telles que les tsunamis ou des tempêtes ont aussi créé, tout au long de l'histoire, des dommages importants. Les catastrophes les plus récentes sont celles générées lors de l'ouragan Katrina, les tsunamis de 2004 en Sumatra et de 2011 au Japon (Fig.1.2). Ces phénomènes ont causé des pertes massives en vies humaines, des bâtiments sont totalement endommagés ou partiellement et laissant des milliers de personnes sans-abri.

Le tsunami de Sumatra, qui fut généré par un violent séisme de magnitude de 9,1 à 9,3 sur l'échelle de Richter, avait frappé la région côtière au large de l'île indonésienne de Sumatra [Lay *et al.*, 2005]. Ce tsunami avait touché l'Indonésie et les pays voisins en Asie (y compris l'Inde, Malaisie, Maldives, Sri Lanka et Thaïlande) et les côtes Est de l'Afrique (y compris la Somalie), occasionnant de sérieux dommages dans les régions côtières et petites îles et faisant plus de 283.000 morts. Il fait partie des tsunamis les plus meurtriers de l'histoire humaine [Paris *et al.*, 2009]. Dans un passé récent, l'intérêt de la recherche sur les tsunamis a augmenté considérablement, en raison des menaces d'inondations dans les zones côtières. Les modèles numériques capables de reproduire les phénomènes physiques mis en jeu, sont donc devenus

des outils de plus en plus importants dans les activités d'ingénierie visant à maîtriser ces phénomènes et d'atténuer leurs effets (exemple du projet ANR-TSUMOD).

1.2 Intérêts de la modélisation mathématique et numérique

La modélisation numérique est admise depuis des décennies par les communautés géologiques et océanographiques comme étant un outil essentiel pour la compréhension des tsunamis ou déferlements de vagues. Les modèles numériques et mathématiques utilisés pour la science des tsunamis peuvent servir à plusieurs fins. Ils peuvent être utilisés pour la cartographie des inondations potentielles, ce qui est important pour l'atténuation des risques tels que la planification d'urgence et la construction d'infrastructures côtières. Ils peuvent être utilisés pour des études scientifiques visant à révéler les procédés physiques de l'initiation des tsunamis, de la propagation de vagues jusqu'à la zone d'inondation. Ces études scientifiques pourraient permettre une meilleure prévision de ces phénomènes et d'établir des critères sismiques pour des alertes aux tsunamis. Une modélisation numérique complexe prenant en compte tous les phénomènes physiques mis en jeu et des méthodes d'intégration en temps peu coûteux sont alors nécessaires. Cependant la précision de ces modélisations numériques est aussi limitée par les erreurs de bathymétrie et par les incertitudes liées au mécanisme de déclenchement des tsunamis.

Un des enjeux majeur actuel est celui de l'amélioration de ces méthodes pour la prédiction des tsunamis. Il s'agirait de concevoir des méthodes robustes de prévision en temps réel qui permettraient aux autorités locales d'avoir des données partielles pour un système d'alerte. Ces modèles permettront aussi de comprendre et de prévoir le comportement des infrastructures près des zones côtières qui seront soumises à des sollicitations hydrodynamiques intenses et répétées. Avec des données sismiques (ou des perturbations observées) qui seront considérées comme conditions initiales pour ces modèles, la rapidité des codes d'hydrodynamique pour faire propager l'onde jusqu'aux côtes est nécessaire afin de pouvoir transmettre de façon efficace l'information aux organismes compétents. Vue la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, un couplage entre les méthodes numériques existantes semblent nécessaire et chacune d'elles pourrait être utilisée là où elle est la plus performante. Par exemple dans [Guignard *et al.*, 1999], un couplage entre la méthode BIEM (Boundary Integral Element Method) [Grilli *et al.*, 1989] et la méthode VOF (Volume Of Fluid) [Hirt et Nichols, 1981] est utilisé.

1.3 Phénomènes physiques mis en jeu

Nombreux sont les phénomènes physiques qui interviennent lors d'un impact de vague sur une structure. Parmi les principaux phénomènes physiques à prendre en compte dans un modèle de simulation de l'impact de vagues en zone côtière ou offshore, on distingue:

- La propagation de la vague:
 - ⇒ phénomène de réfraction sur des fonds variables
 - ⇒ réflexion par effet topographique (talus sous-marin, gradient bathymétrique fort, présence d'îles)
 - ⇒ diffraction par des structures marines
 - ⇒ déferlement aux plus fortes cambrures
- Fortes non-linéarités de la surface libre (de forme complexe) et de l'écoulement au moment du déferlement.

- L'impact de la vague:
 - ⇒ Sur une structure (côtière ou offshore): pression d'impact et effort hydrodynamique pouvant endommager la structure (digues en enrochement, structures portuaires, plateformes pétrolières,...)
 - ⇒ Envahissement: submersion de la zone littorale, phénomène de "run-up" (impact de vagues de grande amplitude sur des supports flottants), phénomène de "green-water" (envahissement d'eau sur le pont d'un navire pétrolier), inondation du cordon littoral par un tsunami,...
 - ⇒ Sur le fond: charriage de sables (problème d'érosion), remontée des boues de forage (offshore).
- Les mécanismes turbulents dans la zone fortement mélangée du déferlement (à l'interface eau/air), ainsi qu'au voisinage du fond avec remise en suspension des matériaux (sables, boues) par la vitesse orbitale turbulente de la houle.
- La prise en compte de la géométrie et des caractéristiques réelles du cas d'étude: présence de structures de forme pouvant être complexe qu'il faut pouvoir discrétiser de manière précise, nature des fonds (ou macro-rugosités).
- Le tsunami: mécanismes de dissipation de l'énergie du tsunami au cours de sa propagation dans la zone submergée et estimation du niveau d'eau maximum atteint.
- Etat de la mer: des techniques de télédétection haute résolution spatiale permettent de connaître l'état de la mer (surface de la mer, formation d'écume, température de la surface de la mer, vagues abruptes, micro-ondes).

Un des mécanismes physiques importants des écoulements des vagues est leurs interactions avec les structures.

1.3.1 Interactions vagues-structures

L'interaction dynamique entre un fluide et une structure est un mécanisme qui intervient dans de nombreux phénomènes: le comportement des ailes d'avion, des ponts en suspension, écoulements dans des vaisseaux sanguins, ballonnement de fluide dans des réservoirs et l'impact des vagues sur des structures. L'aspect commun à tous ces phénomènes est l'échange d'énergie entre le fluide, que ce soit l'air ou l'eau, et la structure, cette dernière pouvant être déformable.

La simulation numérique des problèmes d'interaction fluide-structure est un outil intéressant pour la conception des structures de défense côtière. Des modèles fiables pourraient être utilisés pour calculer l'impact des vagues sur les structures et pour déterminer la porosité, la rugosité et d'autres effets pour une conception optimale des structures. Plusieurs études ont été effectuées dans cette thématique ([Bullock *et al.*, 2007], [Kirkgöz et Mamak, 2004]). Cependant des efforts restent à faire sur la compréhension de l'hydrodynamique des écoulements à surface libre provoquant des charges d'impact sur les ouvrages maritimes [Bulgarelli *et al.*, 2003].

Pour protéger les côtes et le milieu environnant, la construction d'obstacles est nécessaire. Ces derniers pourraient permettre la dissipation de l'énergie des vagues et ou leur réflexion. Une

des tâches principales dans la conception et l'exploitation d'ouvrages maritimes est l'analyse des interactions entre fluide et structure. Ces interactions dépendent fortement de la rigidité de la construction, la forme des structures et d'autres paramètres.

Depuis l'effondrement du pont de Tacoma Narrows en 1940, les simulations numériques et expérimentales d'interactions fluide-structure n'ont cessé d'être améliorées pour prédire le comportement dynamique des structures face aux sollicitations.

1.3.2 Inondation induite par un tsunami

Les tsunamis peuvent être générés par plusieurs phénomènes géophysiques, les plus fréquents sont les tremblements de terre, les glissements de terrain sous marin, et surtout une combinaison des deux. En raison de la nature diverse des phénomènes physiques mis en jeu lors de ces perturbations, les tsunamis peuvent varier considérablement dans leur taille et leur étendue. Cependant, ils sont souvent destructeurs et meurtriers. Par exemple, les glissements de terrain produisent souvent des tsunamis océaniques qui peuvent dévaster toute une région. Le mécanisme de production de ces tsunamis est considéré, le plus souvent, comme étant le soulèvement vertical de la colonne d'eau en raison du déplacement de la plaque océanique. Ce déplacement crée les conditions initiales. Récemment, dans ses études, Rivera [Rivera, 2006] a montré que ce mouvement initial de l'eau est un élément très important dans le mécanisme d'un tsunami.

En fin de compte, l'objectif de la modélisation des tsunamis est de déterminer ce qui se passe sur la rive ou sur le littoral, car c'est là que les tsunamis libèrent leur énergie. Il existe différents types d'approches qui ont été utilisées pour le traitement de la rive. La plupart du temps, on évite de modéliser les inondations en traitant le rivage comme une frontière de paroi fixe. Dans ce cas, modéliser l'inondation revient à l'estimer par un "run-up" à la frontière.

Cette approche n'est certainement pas sans mérite, mais elle est moins fréquente car nombreuses sont maintenant les méthodes de modélisation des inondations qui sont disponibles. La plupart du temps, des méthodes de traitement du littoral (appelées méthodes de suivi du littoral) sont mises en œuvre [Tan et Chu, 2010]. Ces méthodes tentent de suivre le littoral explicitement. Pour simuler le scénario d'inondation dans le cas d'une rupture de barrage, Giovanni [Giovanni, 2010] développe une méthode de suivi du littoral et a montré que son modèle est capable de modéliser les problèmes d'inondation avec une prévision satisfaisante. Chen [Chen, 2004] utilise un modèle hydrodynamique pour les écoulements à surface libre qui permet de suivre la position dynamique de la rive. Une méthode élaborée par Titov et Synolakis [Titov et Synolakis, 1995] extrapole la vitesse du fluide à la rive pour déterminer le mouvement et la position de cette dernière. Zelt [Zelt, 1991] quant à lui, utilise une formulation lagrangienne des équations de Boussinesq pour simuler le mouvement du littoral.

1.4 Modèles mathématiques

Le déferlement de vagues est un processus physique d'extrême importance [Duval, 2007]. Cependant sa modélisation mathématique et numérique reste complexe à cause des différentes échelles d'écoulement mis en jeu lors du processus de déferlement. La plupart des modèles mathématiques utilisés pour la propagation et le déferlement de vagues reposent sur l'une des quatre catégories suivantes: les modèles Shallow Water, les modèles basés sur la théorie potentielle, les modèles SPH et ceux de Navier Stokes. Les modèles à potentiels ne sont pas appropriés pour la simulation de vagues déferlantes à cause de l'hypothèse irrotationnelle de l'écoulement. Les modèles de Navier Stokes sont très coûteux en temps de calcul. Les méthodes de suivi de surface libre ou de capture d'interface y sont nécessaires pour localiser

la surface en mouvement libre. L'objectif de ce paragraphe est de donner une vue d'ensemble de ces différents modèles, qui durant les dernières décennies, ont permis une analyse et une meilleure compréhension des processus de déferlement avec des expériences de laboratoire.

1.4.1 Les modèles de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes régissent l'écoulement d'un fluide visqueux compressible newtonien. Elles s'écrivent de la forme (Eq.1.1-2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} \otimes \bar{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \bar{u} + \rho \bar{F} \quad (1.2)$$

Où $\bar{u} = (u, v, w)$ représente le vecteur vitesse suivant x , y et z , ρ la masse volumique du fluide, μ la viscosité dynamique, p la pression et $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$ modélise les forces extérieures.

Ces équations peuvent être résolues dans l'air et dans l'eau, couplées avec des méthodes de reconstruction d'interface comme la méthode VOF (Volume Of Fluid) [Hirt et Nichols, 1981] ou avec des méthodes de capture d'interface, pour traiter le déferlement de vagues. La simulation numérique avec ce modèle peut fournir des informations détaillées sur l'hydrodynamique d'une vague déferlante, ce qui n'est pas souvent facile avec des expériences physiques [Phung *et al.*, 2004]. Récemment, avec le développement des moyens informatiques, il est possible de résoudre directement les équations de Navier-Stokes pour la simulation de nombreux problèmes, y compris les déferlements de vagues. Le premier succès de la résolution directe des équations de Navier-Stokes pour un problème bidimensionnel avec surface libre a été réalisé par Harlow et Welch [Harlow et Welch, 1965] avec une méthode MAC (Marker And Cell) [Welch *et al.*, 1966] pour le suivi de la surface libre.

L'étude de certains phénomènes, notamment les déferlements de vagues et leurs impacts, le transport des polluants et les inondations, peut être effectuée par la simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes en utilisant une méthode de suivi d'interface. L'avantage de cette approche DNS est que toutes les échelles physiques sont résolues et aucun modèle de turbulence n'est nécessaire, voir par exemple [Miyata, 1986]. Cependant, elle est très limitée pour des nombres de Reynolds relativement élevés car ces modèles se caractérisent par des coûts de calcul très importants. Ceci est principalement dû à la nécessité d'une grille fine afin d'obtenir une bonne représentation du phénomène. Une autre catégorie de ces méthodes sont celles basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) ([Lin et Liu, 1998a], [Christensen *et al.*, 2000]). Elles sont utilisées, comme les méthodes DNS, pour traiter les déferlements de vagues et de leur impact sur les structures côtières ([Lin et Liu, 1998a], [Lin et Liu, 1998b]). Dans leurs travaux, Lin et Liu ([Lin et Liu, 1998a], [Lin et Liu, 1998b]) ont montré la performance de ces méthodes à fournir de bons résultats et ont tendance à surestimer la viscosité turbulente d'où une sous-estimation de l'élévation de la surface libre. Pour plus de détails sur ces méthodes, on peut consulter l'article de Zhao *et al.* [Zhao *et al.*, 2004]. Concernant les méthodes LES (Large-Eddy-Simulation) pour la simulation des grandes échelles toujours basées sur les équations de Navier-Stokes, des études importantes ont été effectuées par plusieurs auteurs [Christensen et Deigaard, 2001], [Christensen, 2006], [Watanabe et Saeki, 1999], [Wu et Liu, 2009].

1.4.2 Les modèles de type «Shallow water» ou eaux peu profondes

L'hypothèse sous-jacente pour les modèles shallow water est que la profondeur du fluide est faible par rapport à la longueur d'onde de la perturbation.

Les équations du type Shallow water sont un système d'équations sur la profondeur et la quantité de mouvement. Ils s'obtiennent par une intégration verticale (Eq.1.3-5) des champs tridimensionnels dans le cadre de l'approximation hydrostatique et peuvent s'écrire pour un fluide homogène [David, 2006]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = -gh \frac{\partial B}{\partial y} \quad (1.5)$$

où h représente la profondeur du fluide considéré, B l'élévation de la bathymétrie (Fig.1.3), g la gravité, u et v les vitesses suivant les directions x et y . La surface libre z est alors définie comme $z = h(x, y) + B(x, y)$

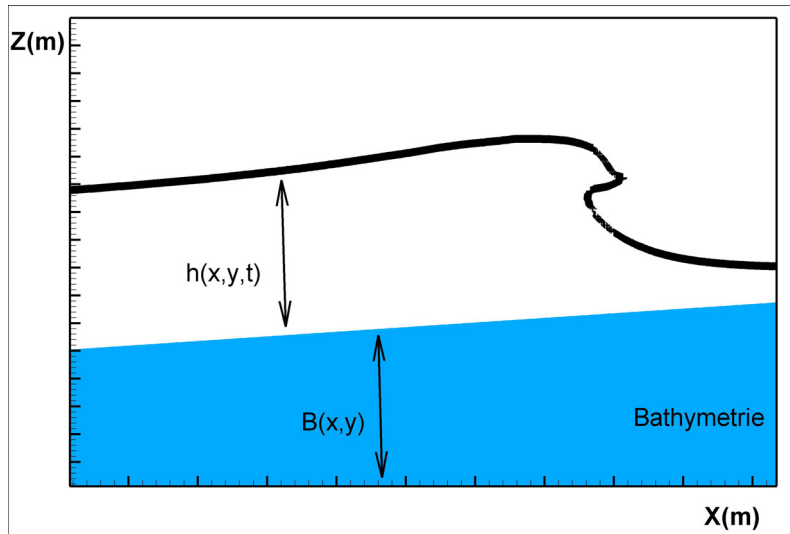


Fig.1.3: Modèles Shallow water: Elévation de la surface libre

Ces modèles shallow water qui représentent les équations en eau peu profonde de la dynamique des fluides peuvent être utilisés comme des modèles mathématiques qui permettent de modéliser la propagation des tsunamis et des inondations ([David, 2006], [Sammarco et Renzi, 2008], [Cho *et al.*, 2004], [Pelinovsky *et al.*, 1999], [Koh *et al.*, 2009] et [Dutykh et Mitsotakis, 2010]). Dans leur forme la plus généralement utilisée, ces équations, qui sont dérivées des principes de conservation de la masse et la conservation de moment, sont mises sous système hyperbolique de lois de conservation pour lesquels un vaste corpus de théorie numérique existe.

Horrrillo [Horrrillo *et al.*, 2006] a utilisé, dans son étude sur la dispersion des vagues lors du tsunami dévastateur dans l'océan Indien le 26 Décembre 2004, un modèle shallow water non linéaire, non dispersif (NLSW) et a montré sa capacité à traiter ces phénomènes en grandeur nature. Il permet une évaluation des risques par une estimation simple et rapide de la hauteur maximale des vagues et du "run-up". L'hypothèse d'eau peu profonde n'est pas alors très contraignante. Habituellement, les modèles de tsunami basés sur cette théorie ignorent l'effet de la dispersion des ondes non linéaires, effet de dispersion qui peut être important pour l'estimation de l'amplitude des tsunamis transocéaniques [Kulikov, 2006]. Dutykh, dans ses travaux récents [Dutykh *et al.*, 2011], utilise un modèle de type Shallow water (avec le code numérique Volna) opérationnel pour traiter le cycle de vie complète d'un tsunami (génération, propagation et de "run-up" le long des côtes). Plusieurs études mathématiques et physiques de déferlements de vagues sur des plages en pente et d'autres géométries simplifiées, pour une meilleure compréhension des inondations induites par les tsunamis, ont longtemps fait recours à des approximations avec les modèles de type shallow water, le lecteur pourra voir par exemple les travaux de [Hibberd et Peregrine, 1979] et de [Yeh *et al.*, 1989]. Ces dernières années, les méthodes de type Godunov en volumes finis ont été de plus en plus utilisées pour résoudre les équations en eau peu profonde pour diverses applications, voir par exemple [Gallouët *et al.*, 2003].

1.4.3 Les modèles de la théorie des écoulements à potentiel

On considère un écoulement où la vorticité du fluide peut être négligée. A vorticité négligée, la vitesse du fluide peut alors s'écrire comme étant le gradient d'un potentiel $\phi(x, y, z, t)$:

$$\vec{u} = \nabla\phi \quad (1.6)$$

x , y et z représentent les trois directions de l'espace. L'équation de continuité $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ donne l'équation de Laplace (Eq.1.6):

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.7)$$

L'équation sur la quantité de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (1.8)$$

Longuet-Higgins [Longuet-Higgins et Cokelet, 1976] développe pour l'étude des déferlements, un modèle issu de la théorie potentielle basé sur une approche utilisant un système mixte eulérien-lagrangien combiné avec une formulation des équations intégrées sur la frontière. La capacité des modèles d'écoulement basés sur la théorie potentielle non-linéaire pour décrire le mouvement raide et le renversement des ondes de gravité a été confirmée dans les travaux de [Dommermuth *et al.*, 1988]. Dans ces derniers, des simulations numériques basées sur la théorie potentielle non-linéaire reproduisent les mesures expérimentales de l'élévation de surface et des vitesses de fluide à différentes profondeurs pour un déferlement plongeant généré par une houle. Les premières applications 2D comprennent les études de ([Longuet-Higgins et Cokelet, 1976], [Faltinsen *et al.*, 1977], [Vinje et Brevig, 1981] et [Lin *et al.*, 1984]). On trouve des applications plus récentes en trois dimensions 3D dans [Ferrant, 1994] et dans [Celebi *et al.*, 1998].

Parmi les méthodes issues de la théorie potentielle, on peut citer celle développée par Grilli *et al.* [Grilli *et al.*, 1989]. Il s'agit de la méthode BIEM (Boundary Integral Element Method) qui

utilise une formulation des équations intégrées sur les frontières du domaine d'étude. Dans [Grilli *et al.*, 1997], un modèle bidimensionnel d'écoulement non linéaire totalement basé sur la théorie des écoulements à potentiel pour calculer les caractéristiques diverses des vagues solitaires se propageant dans une profondeur constante est utilisé. Ce modèle est ensuite utilisé pour l'étude du « shoaling » et du déferlement des vagues sur des pentes différentes. Dernièrement, une version tridimensionnelle non linéaire de cette méthode est disponible et a été validée dans le cas d'un renversement de vagues sur fond arbitraire [Grilli *et al.*, 2001]. Les problèmes d'impact de vagues avec une complexité géométrique de la surface libre et avec des discontinuités dans les effets d'entraînement de l'eau et l'air ne peuvent pas être appliqués de manière satisfaisante par cette théorie [Bulgarelli *et al.*, 2003] car ces modèles ne tiennent pas compte de la tension superficielle des fluides mis en jeu et sont basées sur l'irrotationalité de l'écoulement. Dutykh [Dutykh, 2007], dans ses travaux sur la modélisation des tsunamis, propose un modèle simple et opérationnel pour la modélisation de l'impact des vagues sur les structures côtières. Il utilise les équations de Boussinesq en rajoutant des effets dissipatifs et a montré la pertinence de cette approche par rapport aux modèles sans dissipation.

1.4.4 Les modèles SPH

Les modèles SPH (Smoothed-Particle Hydrodynamics) ([Khayyer et Gotoh, 2009], [Fang *et al.*, 2009]) ont été initialement développés pour les applications d'astrophysique ([Lucy, 1977], [Gingold et Monaghan, 1977]) et plus tard ont été étendus à d'autres domaines comme l'hydrodynamique [Violeau, 2010]. Une bibliographie importante peut être trouvée dans les travaux de [Fang *et al.*, 2009] et de [Crespo, 2008] concernant les domaines d'application de ces méthodes. L'idée de base des modèles SPH est d'utiliser le mouvement collectif d'un grand nombre de particules pour représenter leur flux d'une manière Lagrangienne plutôt qu'Eulérienne. Chaque particule transportée a ses propres grandeurs physiques comme la masse, la vitesse, densité. On part des équations de Navier-Stokes (Eq.1.1-2) réécrit sous sa forme (Eq.1.9-10):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{u} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{u} + \bar{F} \quad (1.10)$$

Avec la méthode SPH, le domaine d'étude Ω est discrétisé en N nœuds entre lesquels il n'existe pas de connectivité fixe [Caleyron *et al.*, 2011]. Chaque nœud représente une quantité de matière m_i , de pression p_i , de viscosité μ_i et de vitesse \bar{U}_i . Les nœuds interagissent les uns avec les autres par l'intermédiaire de fonctions de forme w . Pour le calcul de cette fonction, le lecteur pourra consulter par exemple les travaux de [Caleyron *et al.*, 2011], de [Sun *et al.*, 2010] de [Crespo, 2008] ou de [Fang *et al.*, 2009]. L'approximation d'un champ f et de son gradient peuvent s'écrire en fonction de w comme:

$$f(\bar{x}_i) \approx \sum_{j \in \Omega_{V_i}} f_j w_{ij} V_j \quad (1.11)$$

$$\nabla f(\bar{x}_i) \approx \sum_{j \in \Omega_{V_i}} f_j \nabla w_{ij} V_j \quad (1.12)$$

\bar{x}_i représente les coordonnées du nœud i , V_j le volume de matière attachée au nœud j , $w_{ij} = w_i(\bar{x}_j)$ la valeur de la fonction de forme au nœud i en \bar{x}_j .

Les termes de gradients et de viscosité peuvent être calculés de la manière suivante:

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p\right)_i = \sum_{j \in \Omega_{V_i}} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{u}\right)_i = \sum_{j \in \Omega_{V_i}} \left(\frac{4(\mu_i + \mu_j) \bar{r}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{(\rho_i + \rho_j)^2 \|\bar{r}_{ij}\|^2} \right) (\bar{u}_i - \bar{u}_j) \quad (1.14)$$

Avec $\bar{r}_{ij} = \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|$ la distance entre les nœuds i et j et Ω_{V_i} est le voisinage du nœud i de taille $2h$ (Fig.1.4)

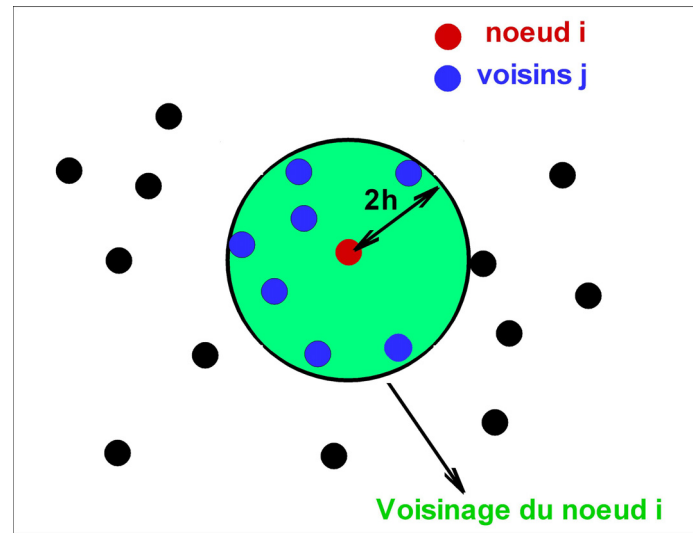


Fig.1.4: Modèles SPH: Voisinage d'un nœud i du domaine d'étude

A partir de des équations (Eq.1.9-10) et on peut établir une formulation discrète de l'équation de continuité et de la quantité de mouvement d'un fluide compressible ou quasi compressible visqueux de la forme:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j \in \Omega_{V_i}} m_j (\bar{u}_i - \bar{u}_j) \nabla w_{ij} \quad (1.15)$$

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \sum_{j \in \Omega_{V_i}} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} + \sum_{j \in \Omega_{V_i}} \left(\frac{4(\mu_i + \mu_j) \bar{r}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{(\rho_i + \rho_j)^2} \right) (\bar{u}_i - \bar{u}_j) + \bar{F}_i \quad (1.16)$$

Les modèles SPH deviennent de plus en plus populaires et trouvent de nombreuses applications dans le domaine de la mécanique des fluides, y compris les écoulements à surface libre [Zheng *et al.*, 2009]. Ils peuvent être utilisés pour des glissements de terrain induits par un écoulement et pour la modélisation des interactions fluide-structure. La caractéristique la plus attractive de la méthode SPH pour la modélisation des vagues est qu'il n'y a pas

d'approche spéciale pour traiter la surface libre. Dans la description lagrangienne de la méthode SPH, les problèmes de diffusion numérique sont évités contrairement aux méthodes traditionnelles comme la méthode de résolution d'Euler ou de Navier-Stokes avec une méthode de suivi d'interface. En dépit de ses progrès remarquables de ces dernières années pour la simulation de vagues avec grandes déformations de la surface libre, l'inconvénient du SPH réside de son exigence extrême en temps CPU. Le traitement des conditions aux limites pour les modèles SPH pose aussi un problème pour la mise en œuvre de leur algorithme ([Violeau, 2010] et [Fang *et al.*, 2009]).

Les méthodes SPH peuvent cependant être utilisées pour simuler divers phénomènes physiques dont le déferlement de vagues, la rupture de barrages et l'impact des vagues sur une structure. Par exemple dans deux études récentes ([Crespo, 2008] et [Violeau, 2010]), on peut trouver des applications et validations 3D avec cette méthode dans le cas d'une rupture de barrage en présence d'obstacle.

1.5 Modèles numériques multi-fluides

Dans cette partie, on s'intéressera aux méthodes traitant les écoulements diphasiques ou multiphasiques par le mouvement de plusieurs fluides (ou phases) séparés par des interfaces et qui sont dérivées des équations de la mécanique des milieux continus classique. On distingue deux approches: l'approche lagrangienne et celle eulérienne.

Dans le contexte lagrangien, le maillage de calcul se déplace et se déforme avec l'interface dans le cas d'un écoulement bi fluide. Un des avantages de ces méthodes réside dans leur capacité à décrire très précisément des conditions de surface libre, toutefois les déformations peuvent être très importantes et sans limite. Il en résulte des distorsions de maillage qui peuvent rendre l'approche impertinente [Scheffer et Zukas, 2000]. Les méthodes lagrangiennes ne comportent pas de termes de convection non linéaires qui sont présents dans les approches eulériennes. Avec l'interface qui est modélisée comme étant une ligne de maillage, l'avantage de ces méthodes est qu'elles peuvent décrire cette interface avec précision [Biausser, 2003].

Le cas qui va nous intéresser ici est l'approche eulérienne qui permet de gérer de très grandes déformations. Ces méthodes utilisent un maillage fixe avec une équation supplémentaire pour le suivi de l'interface. Une classe de méthodes eulériennes populaires est basée sur la localisation de l'interface. Il s'agit d'introduire une variable supplémentaire qui jouera un rôle d'indicateur et représentera la fraction massique ou volumique d'une des espèces en présence dans notre domaine de calcul. Pour une comparaison des deux approches pour des études avec des géométries complexes, de grandes déformations de l'interface et pour les précisions de calcul, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Crespo, 2008] et de [Liu et Liu, 2003]. Les méthodes eulériennes peuvent être classées en trois catégories: les méthodes de suivi de volume (« volume-tracking ») pour suivre chaque phase, les méthodes de suivi de front (« front-tracking ») pour le suivi direct de l'interface et enfin les méthodes de capture d'interface (« front-capturing ») où l'interface est déduite du calcul.

1.5.1 Méthodes «Marker And Cell»

Une des premières méthodes de suivi d'interfaces matérielles développée par Welch et Harlow dans les années 60 est la méthode MAC ([Harlow et Welch, 1965] et [Welch *et al.*, 1966]). La méthode MAC s'appuie sur une double représentation du fluide. La première de type Eulérienne est destinée au calcul des champs de vitesse et de pression du fluide sur une grille fixe. La deuxième Lagrangienne où l'interface est modélisée comme étant un ensemble de points ou de particules sans masses (Marqueurs) connectés entre eux et se déplaçant dans le domaine de calcul. Ces marqueurs sont advectés par le champ de vitesse du fluide à chaque

pas de temps par une méthode lagrangienne, et permettent ainsi la localisation du fluide au cours de la simulation.

Ces méthodes MAC donnent une très bonne résolution de l'interface, cependant les changements topologiques de l'interface s'effectuent difficilement [Basset, 2006]. Des travaux ont été effectués récemment par McKee et al. [McKee *et al.*, 2008] pour fournir un aperçu des progrès récents de ces méthodes et de leur description détaillée dans la dynamique des fluides. Par exemple, elles sont difficiles à appliquer dans le cas des déferlements ainsi que les mouvements de renversement des vagues. Pour ces cas, le nombre de marqueurs doit être très important d'où la nécessité d'un processus compliqué qui sert à supprimer des marqueurs redondants et d'en rajouter de nouveaux. Elle est aussi difficile pour traiter le mouvement du volume d'air mélangé à l'eau après déferlement [Phung *et al.*, 2004].

1.5.2 Méthodes «Front Tracking»

Les méthodes de suivi de front ont été introduites par Unverdi et Tryggvason [Unverdi et Tryggvason, 1992].

Avec ces méthodes, le suivi s'effectue grâce à une description explicite de cette dernière de l'interface. Elle y est décrite comme étant un ensemble de marqueurs qui seront transportés dans le domaine de calcul à la vitesse locale de l'écoulement. La reconnexion de ces marqueurs permettra de reconstruire la géométrie de l'interface ([Biausser, 2003], [Tanguy, 2004]). Comme les méthodes MAC, les changements topologiques exigent également un soin particulier dans les zones de fort mélange entre les fluides.

Des développements récents concernant ces méthodes peuvent être trouvés dans [Shin et Juric, 2002]. L'avantage des méthodes de suivi de front sur les méthodes de capture d'interface pour la résolution numérique des surfaces de discontinuité dans les écoulements multi-fluide réside dans leur capacité d'éliminer la diffusion numérique de certaines grandeurs physique comme la densité à travers l'interface [Anderson et McFadden., 1998]. Cependant, ces techniques restent assez difficiles à mettre en œuvre pour une utilisation générale [Bonometti et Magnaudet, 2007].

1.5.3 Méthodes «Volume of Fluid»

Avec les méthodes volume of fluid (VOF) [Hirt et Nichols, 1981], chaque cellule de calcul est supposée contenir éventuellement un mélange des deux fluides. Le volume occupé par chaque fluide est représenté par une fonction F qui représente la fraction volumique de l'espèce transportée par le courant avec une vitesse \vec{u} . Elle est modélisée par l'équation de transport (Eq.1.17) qui vaut 1 dans le fluide 1 et 0 dans le fluide 2 et est comprise strictement entre 0 et 1 au niveau de l'interface (Fig.1.5).

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (F\vec{u}) = 0 \quad (1.17)$$

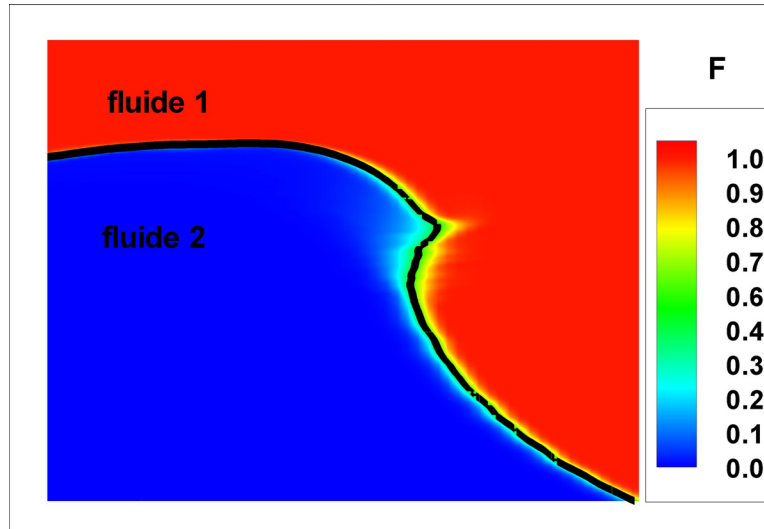


Fig.1.5: Representation de l'interface pour la méthode VOF : Fonction VOF et isosurface $F=0.5$ en courbe noire

Cette méthode est largement utilisée pour les écoulements incompressibles et est basée sur le principe de conservation de la masse [Batkam, 2002].

La méthode VOF a montré son efficacité pour le suivi d'une interface fluide et est beaucoup utilisée dans les codes de calcul industriel. D'importants efforts ont été faits par de nombreux auteurs dans le développement de ces méthodes pour mieux évaluer cette fraction volumique F . Afin d'obtenir moins de diffusion de l'interface. Une reconstruction de l'interface est aussi faite pour plus de précision, voir par exemple les travaux de Youngs [Youngs, 1982] ou de Scardovelli et Zaleski [Scardovelli et Zaleski, 2003]. Ces derniers proposent une nouvelle classe d'algorithmes qui préserve exactement la masse dans le cas des écoulements incompressibles sur un maillage cartésien. C'est un algorithme de reconstruction de l'interface avec la méthode VOF basé sur une technique de moindres carrés avec une approximation affine (lissage linéaire) par morceaux. La performance de l'algorithme a été testée avec plusieurs autres techniques VOF et a montré de très bons résultats. Cependant les principaux inconvénients de la méthode VOF sont sa tendance à lisser l'interface et le coût de calcul qui est élevé en raison de la nécessité d'une grille de calcul fine et des pas de temps petits [Greaves, 2004].

1.5.4 Méthodes «Level Set»

Une autre classe de méthodes eulériennes populaire est basée sur l'équation Level-Set (ligne de niveaux). Cette méthode Level Set développée par Osher et Sethian dans les années 80 [Osher et Sethian, 1988] est une méthode de suivi d'interface. On définit une fonction distance signée F dans tout le domaine de calcul. Cette fonction vérifie une équation du même type que (Eq.1.17). Si on considère un écoulement bi fluide, cette fonction est positive dans le fluide 1 et négative dans le fluide 2. Elle vaut zéro à l'emplacement de l'interface (Fig.1.6). La courbe de niveau zéro représente l'interface, c'est-à-dire:

$$\Gamma(t) = \{\bar{x}, F(\bar{x}, t) = 0\} \quad (1.18)$$

t représente le temps, \bar{x} les dimensions de l'espace.

La fonction 'Level set' F est alors définie comme:

$$\begin{cases} F(\bar{x}, t) = +\text{Dist}(\bar{x}, \Gamma(t)) & \text{si } \bar{x} \in \text{Fluide1} \\ F(\bar{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma(t) \\ F(\bar{x}, t) = -\text{Dist}(\bar{x}, \Gamma(t)) & \text{si } \bar{x} \in \text{Fluide2} \end{cases} \quad (1.19)$$

$\text{Dist}(\bar{x}, \Gamma(t))$ est la distance de \bar{x} par rapport à Γ .

La fonction F vérifie la propriété de distance algébrique à l'interface: $\|\nabla F\| = 1$.

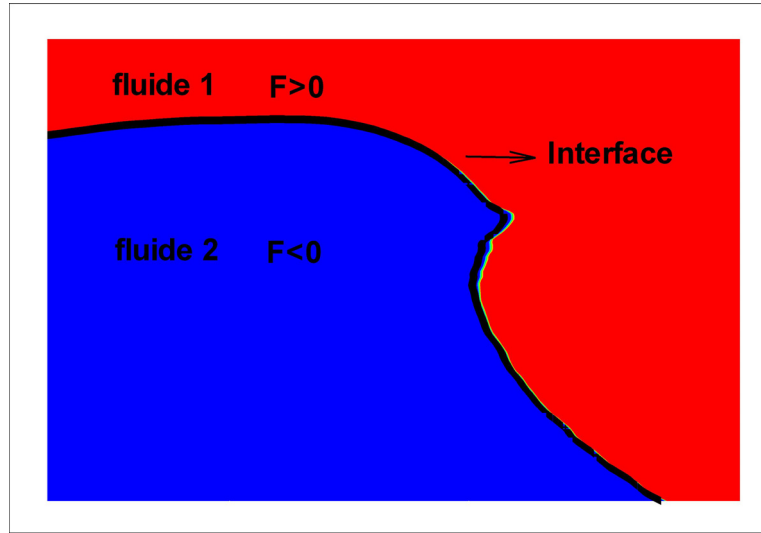


Fig.1.6: Representation de l'interface pour la méthode Level Set: Fonction Level Set et isosurface $F=0.5$ en courbe noire

Pour une étude détaillée des méthodes Level set, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Sethian, 1996], [Osher et Fedkiw, 2003], [Basset, 2006], [Zhao *et al.*, 1998] et [Lv *et al.*, 2010]. Du fait du changement de topologie, de singularités géométriques et de la diffusion numérique, F perd sa caractéristique de distance signé et la conservation de la masse n'est pas respectée [Sussman *et al.*, 1998]. Des études ont été effectuées à ce sujet et consistent à modifier localement le champ d'écoulement dans la région de l'interface pour garder la pente de la fonction Level constante [Adalsteinsson et Sethian, 1999]. Cette gestion particulière de l'interface est nécessaire pour garantir les propriétés de la fonction distance signée [Saurel *et al.*, 2009]. Nombreuses sont les méthodes qui utilisent une technique d'initialisation pour une redistanciation de cette fonction Level set, par exemple dans [Lv *et al.*, 2010].

Cette technique d'initialisation se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles instationnaire en pseudo-temps que l'on résout à la fin de chaque pas de temps réel. On arrête le processus au moment où on aboutit à un état stationnaire qui correspondra à une réinitialisation complète de F dans l'ensemble du domaine de calcul.

1.5.5 Modèle de capture d'interface

On décrit l'écoulement bi-fluide en résolvant les équations de conservation sur un mélange des deux phases. En fonction des hypothèses on obtient des modèles plus ou moins riches (et donc plus ou moins complexes). Le but de cette section est de décrire brièvement les modèles classiques utilisées pour la simulation des écoulements bi-fluides ou diphasiques. Nombreuses sont actuellement les méthodes qui permettent d'avoir une bonne modélisation de ces écoulements à surface libre. On part toujours du système d'équations avec la conservation de

la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Dans les modèles bi-fluides où apparaît la notion d'interface, cette dernière est modélisée par une équation de convection sur une quantité Γ qui permet de localiser les deux fluides en présence et est un paramètre essentiel pour la loi de pression (Eq.1.20).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + p \bar{I}_3) = \rho \bar{g} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + p) \bar{u}) = \rho \bar{g} \cdot \bar{u} \\ \frac{\partial \rho \Gamma}{\partial t} + \text{div}(\rho \Gamma \bar{u}) = 0 \\ p = p(\rho, \varepsilon, \Gamma) \end{cases} \quad (1.20)$$

Où ρ représente la masse volumique, $\bar{u} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse de composantes u, v, w suivant x, y, z , E l'énergie massique totale, \bar{g} la gravité, \bar{I}_3 le tenseur identité de dimension 3×3 . L'énergie massique totale est $E = \varepsilon + \frac{1}{2} \|\bar{u}\|^2$ avec ε l'énergie interne. p est la pression du fluide et vérifie une loi d'état $p = p(\rho, \varepsilon, \Gamma)$.

La difficulté de la modélisation de ces écoulements bi-fluides réside dans la résolution de l'interface qui représente une discontinuité ou la surface le long de laquelle, il y'a une discontinuité de contact [Barberon, 2000]. Pour mieux modéliser l'interface et pour une meilleure approximation de la pression, des méthodes ont été proposées dans la littérature et il s'agit ici de rajouter d'autres équations pour mieux traiter les transitions de phase (interface).

1.5.5.1 Modèles à 5 équations

Une classe importante de modèles réduits est formée par cinq équations, dans laquelle des équilibres pour la vitesse et pour la pression sont considérés. Les deux équilibres sont valides à travers les interfaces comme une discontinuité de contact [Kreeft et Koren, 2010]. Les trois premières équations pour ces modèles sont les équations de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement comme pour les modèles à quatre équations. Une équation de conservation de l'énergie pour l'un des deux fluides est considérée dans le modèle à cinq équations de [Kreeft et Koren, 2010] permettant un échange d'énergie entre les deux fluides. Pour le modèle à cinq équations de [Allaire *et al.*, 2002] (Eq.1.21), l'équation de conservation de la masse totale est remplacée par deux équations qui modélisent la conservation de chaque phase en présence avec un équilibre isobare équivalente entre les phases. Les deux fluides sont considérés comme étant compressible avec une masse volumique ρ_i , de vecteur vitesse \bar{u} , d'énergie interne ε et de pression p . Pour ces modèles, on définit une fraction massique $z \in [0, 1]$ et on pose $z_1 = z$ et $z_2 = 1 - z$.

Ce modèle bi fluide pour un fluide visqueux s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_1 \rho_1}{\partial t} + \text{div}(z_1 \rho_1 \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial z_2 \rho_2}{\partial t} + \text{div}(z_2 \rho_2 \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + p \bar{\mathbf{I}}_3) = \rho \bar{\mathbf{g}} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + p) \bar{\mathbf{u}}) = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}(z) = 0 \\ p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, z) \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Avec $\rho = z_1 \rho_1 + z_2 \rho_2$.

Plusieurs méthodes de fermeture existent dans la littérature pour déterminer la pression de l'écoulement ([Allaire *et al.*, 2002], [Faccanoni *et al.*, 2008]). Ces modèles peuvent être utilisés pour des problèmes d'écoulement avec changement de phase liquide-vapeur [Faccanoni *et al.*, 2008]).

1.5.5.2 Modèles à 6 équations

Les modèles à six équations, comme ceux à cinq équations décrites précédemment, sont également dérivés des modèles à sept équations de [Baer et Nunziato, 1986]. Ces modèles ont des propriétés numériques meilleures que ceux à cinq équations pour la construction d'un solveur robuste. La positivité de la fraction volumique y est facilement préservée et la vitesse du son du mélange avec un comportement monotone semble être plus attrayante pour ces types de problèmes avec diffusion d'interface [Saurel *et al.*, 2009]. Le modèle à six équations décrit dans [Saurel *et al.*, 2009] sans un terme de production de la fraction volumique s'écrit pour un fluide non visqueux (Eq.1.22):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}(z_1) = 0 \\ \frac{\partial z_1 \rho_1}{\partial t} + \text{div}(z_1 \rho_1 \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial z_2 \rho_2}{\partial t} + \text{div}(z_2 \rho_2 \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + p \bar{\mathbf{I}}_3) = \rho \bar{\mathbf{g}} \\ \frac{\partial z_1 \rho_1 E_1}{\partial t} + \text{div}(z_1 \rho_1 E_1 \bar{\mathbf{u}}) + z_1 p_1 \text{div}(\bar{\mathbf{u}}) = z_1 \rho_1 \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial z_2 \rho_2 E_2}{\partial t} + \text{div}(z_2 \rho_2 E_2 \bar{\mathbf{u}}) + z_2 p_2 \text{div}(\bar{\mathbf{u}}) = z_2 \rho_2 \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ p_i = p_i(\rho_i, \varepsilon_i, z_i), \quad i=1, 2 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Avec

$$E_i = \varepsilon_i + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2, \quad i=1, 2$$

$$\rho = z_1 \rho_1 + z_2 \rho_2$$

$$p = z_1 p_1 + z_2 p_2$$

1.5.5.3 Modèles à 7 équations

Récemment les modèles à 7 équations à deux pressions, initialement développés les problèmes de transition de la déflagration à la détonation [Baer et Nunziato, 1986], ont fait l'objet de plusieurs études, par exemple dans ([Guillemaud, 2007] et [Seguin, 2002]). Ces modèles sont actuellement les plus complets et sont beaucoup utilisés dans le milieu nucléaire. Plusieurs contributions utilisant cette approche existent dans la littérature, par exemple dans ([Kapila *et al.*, 1997], [Kapila *et al.*, 2001], [Glimm *et al.*, 1999], [Saurel et Abgrall, 1999b]) et une étude récente de [Romenski *et al.*, 2007]. Dans [Saurel et Abgrall, 1999b]), les équations de conservations sont résolues pour chaque phase et on dispose une septième équation qui modélise l'évolution de la surface libre avec la fraction volumique. Avec ces sept équations, ce modèle peut être utilisé pour écoulements bi fluide avec changement de phase. Le modèle de Baer-Nunziato [Baer et Nunziato, 1986] sans transfert de masse, sans un terme de production de la fraction volumique s'écrit pour un fluide non visqueux:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \text{grad}(z_1) = 0 \\ \frac{\partial z_k \rho_k}{\partial t} + \text{div}(z_k \rho_k \vec{u}_k) = 0 \\ \frac{\partial z_k \rho_k \vec{u}_k}{\partial t} + \text{div}\left(z_k \rho_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k + z_k p_k \vec{I}_3\right) = z_k \rho_k \vec{g} + p_1 \text{grad}(z_k) \\ \frac{\partial z_k \rho_k E_k}{\partial t} + \text{div}\left((z_k \rho_k E_k \vec{u}_k + z_k p_k) \vec{u}_k\right) = z_k \rho_k \vec{g} \cdot \vec{u}_k + p_1 \vec{u}_k \cdot \text{grad}(z_k) \\ p_k = p_k(\rho_k, \varepsilon_k, z_k), \quad k=1, 2 \end{array} \right. \quad (1.23)$$

p_1 est égale à la pression de la phase la plus compressible tandis que \vec{u}_1 est égale à la vitesse de la phase la moins compressible. p_1 est souvent considéré comme étant la pression de mélange ($p_1 = z_1 p_1 + z_2 p_2$). Une des avantages de ce modèle à sept équations par rapport aux modèles bi-fluides classiques à six équations est qu'elle est inconditionnellement hyperbolique [Murrone, 2003]. Contrairement aux modèles décrits précédemment, ici on considère une vitesse \vec{u}_k pour chaque fluide.

Ces méthodes peuvent être utilisées pour les problèmes avec changement de phase [Lhuillier, 2003], pour les écoulements de type gaz-particules et liquide-gaz ([Baer et Nunziato, 1986]. Elles peuvent aussi servir pour décrire les phénomènes de bifurcation, telle la transition de la déflagration à la détonation et est couramment utilisé en combustion [Guillemaud, 2007]. Pour plus d'information sur les modèles à sept équations, le lecteur pourra consulter [Guillemaud, 2007] sur la modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bi-fluide à deux pressions.

1.5.6 La présente méthode

Pour traiter les problèmes de déferlement et d'impact de vagues, les modèles bi-fluides à quatre équations (Eq.1.24) paraissent suffisantes pour décrire les écoulements diphasiques eau-air sans changement de phase. Elles permettent aussi de gagner en temps de calcul par rapport aux méthodes décrites précédemment qui présentent plus d'équations.

Avec cette approche, on considère l'ensemble des fluides en présence comme un seul milieu continu avec une loi de fermeture pour calculer la pression. Cette approche est aussi différente de celles des méthodes de reconstruction ou de suivi d'interface. Cette dernière y est considérée comme une zone de diffusion numérique ou comme une zone où on a des discontinuités de contact. L'interface est vue comme une zone de mélange artificielle. Un travail de pionnier pour ces méthodes a été réalisé par Abgrall [Abgrall, 1996]. Le challenge pour ces méthodes reste encore à effectuer d'autres travaux mathématique, physique et numérique afin d'étendre de manière cohérente les lois d'état de la thermodynamique dans le mélange artificiel [Saurel *et al.*, 2009]. Les études sur ce modèle seront faites dans le prochain chapitre du mémoire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + p \bar{\mathbf{I}}_3) = \rho \bar{\mathbf{g}} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + p) \bar{\mathbf{u}}) = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div}(\rho \varphi \bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ p = p(\rho, \varepsilon, \varphi) \end{array} \right. \quad (1.24)$$

2. Le modèle bi-fluide faible Mach

Ce chapitre est consacré aux méthodes numériques utilisées dans le cadre de cette thèse pour réaliser des simulations numériques d'écoulements bi-fluides. Les notions générales de la dynamique des fluides, les méthodes de pseudo-compressibilité ou approche de compressibilité artificielle sont décrites. Les approximations par volumes finis avec le schéma de Godunov y sont rappelées.

La notion de faible Mach est ici introduite. Le nombre de Mach représente le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son. Cette notion apparaît lorsque l'on s'intéresse aux écoulements compressibles. Elle peut être contraignante pour les schémas explicites car nécessitant des pas de temps très petit à cause du critère de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Levy). Il s'agit dans cette partie de présenter une méthode de simulation numérique résolvant les équations instationnaires de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour deux fluides tels que l'eau et l'air avec une méthode de compressibilité artificielle.

2.1 Hypothèses:

Pour le modèle étudié, on pose un certain nombre d'hypothèses:

- Ecoulement bi-fluide avec loi de mélange (capture d'interface)
- Pas de viscosité
- Pas de tension de surface
- Faible Mach

Avec ces hypothèses, la formulation mathématique du système d'équations instationnaire de Navier-Stokes pour des écoulements visqueux, compressibles conduit à un système d'Euler avec la conservation de la masse (Eq.2.1), de la quantité de mouvement (Eq.2.2) et de l'énergie (Eq.2.3) qui s'écrit:

$$\text{Masse:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Quantité de mouvement:} \quad \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + p \bar{\mathbf{I}}) = \rho \bar{\mathbf{g}} \quad (2.2)$$

$$\text{Energie:} \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + p) \bar{\mathbf{u}}) = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

Où ρ représente la masse volumique, $\bar{\mathbf{u}} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse de composantes u, v, w suivant x, y, z , p la pression, E l'énergie massique totale, $\bar{\mathbf{g}}$ la pesanteur, $\bar{\mathbf{I}}_3$ le tenseur identité de dimension 3×3 . L'énergie massique totale est $E = \varepsilon + \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{u}}\|^2$ avec ε l'énergie interne.

2.1.1 La modélisation de la surface libre

On introduit une variable supplémentaire que l'on notera ici φ dite la fonction couleur. Cette variable joue le rôle d'une indicatrice: elle satisfait $0 \leq \varphi \leq 1$, avec $\varphi = 0$ dans l'eau et $\varphi = 1$ dans l'air.

On peut directement utiliser φ comme un paramètre physique tel que la fraction massique ou volumique d'une des espèces présentes. Cette variable φ vérifie une équation qui dépend de la physique de l'écoulement. Dans le cas où l'interface est purement advectée par le fluide, cette variable φ vérifie une équation de conservation (Eq.2.4).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (2.4)$$

L'un des principaux attraits des méthodes calculant le profil de la surface libre réside dans leur formulation mathématique. La qualité des calculs effectués dépend alors fortement de la discrétisation spatiale et temporelle développée pour cette équation. On verra par la suite les différentes méthodes utilisées pour sa résolution. La simulation d'écoulements multi-fluide nécessite des méthodes numériques très robustes, capables de décrire des surfaces de discontinuité de certaines variables comme la masse qui dépendent de la fraction volumique, soit explicitement ou de manière implicite.

2.1.2 Approximation faible nombre de Mach

Le nombre de Mach est défini comme étant le rapport de la vitesse caractéristique de l'écoulement par rapport à la vitesse du son du milieu.. Pour un nombre de Mach petit (inférieur à 0.3), le milieu peut être considéré comme incompressible. ([Klainerman et Majda, 1982] et [Klainerman et Majda, 1981]). L'approximation faible Mach consiste donc à relaxer la contrainte d'incompressibilité en considérant un milieu très faiblement compressible (donc à faible Mach) en utilisant une vitesse du son artificielle (non physique). De nombreuses études qui traitent les écoulements à faible nombre de Mach existent dans la littérature, pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Benteboula, 2006].

L'avantage de cette approche est que les équations elliptiques des modèles incompressibles, dans les quelles l'équation de continuité ne présente pas de dérivée en temps, sont transformées en un système hyperbolique. Cela permet d'utiliser des méthodes classiques de résolution du type volumes finis.

2.1.3 Le modèle Euler bi-fluide compressible

Nous introduisons dans cette partie les phénomènes physiques que nous nous attachons à décrire. Il s'agit de l'écoulement air/eau pour lequel nous utilisons un modèle compressible d'Euler bi-fluide. L'utilisation de ce modèle d'Euler bi-fluide présente deux avantages. Le premier est qu'elle permette d'éviter de résoudre un système matriciel lié à l'incompressibilité de l'écoulement pour chaque pas de temps. Le second avantage d'ordre numérique et théorique est qu'elle permette d'avoir des coûts de calcul très satisfaisants par rapport aux modèles de Navier-Stokes. Les termes visqueux qui ont tendance à réduire drastiquement les pas de temps y sont négligés.

Ce modèle peut être considéré comme un modèle réduit (ou simplifié) de celui développé par Chantepredrix [Chantepredrix, 2004] qui repose sur un système Navier-Stokes bi-fluide compressible. Les équations (Eq.2.1-4) nous conduisent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho vu)_x + (\rho v^2 + P)_y + (\rho vw)_z = 0 \\ (\rho w)_t + (\rho wu)_x + (\rho wv)_y + (\rho w^2 + P)_z = -\rho g \\ (\rho E)_t + ((\rho(E+p)u)_x + ((\rho(E+p)v)_y + ((\rho(E+p)w)_z = -\rho gw \\ \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y + w\varphi_z = 0 \\ p = p(\rho, \varphi, \varepsilon) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Et dans le cas isotherme où l'équation sur l'énergie n'étant plus nécessaire, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho vu)_x + (\rho v^2 + P)_y + (\rho vw)_z = 0 \\ (\rho w)_t + (\rho wu)_x + (\rho wv)_y + (\rho w^2 + P)_z = -\rho g \\ \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y + w\varphi_z = 0 \\ p = p(\rho, \varphi) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Les lois de pression seront présentées dans le prochain paragraphe. Ces deux modèles peuvent s'écrire sous une forme conservative:

$$\vec{W}_t + F(\vec{W})_x + G(\vec{W})_y + H(\vec{W})_z = S(\vec{W}) \quad (2.7)$$

\vec{W} représente les variables conservatives. F, G et H sont les flux du système et S le terme source.

Pour le modèle isotherme:

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho \varphi u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho \varphi v \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho \varphi w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$p = p(\rho, \varphi)$$

Pour le modèle énergétique:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \\ \rho \phi \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho(E + p)u \\ \rho \phi u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho(E + p)v \\ \rho \phi v \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho(E + p)w \\ \rho \phi w \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g \\ \rho g w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$p = p(\rho, \phi, \varepsilon)$$

Dans ces deux modèles, la pression dépend de la fraction volumique, des densités, d'une vitesse de propagation du son et de l'énergie E (pour le modèle énergétique).

2.1.4 Les lois de pression

Des approches de compressibilité artificielle sont souvent proposées dans la littérature par de nombreux auteurs et sont couramment utilisées. Le concept des algorithmes numériques basés sur ces approches a été proposé par Chorin [Chorin, 1967]. L'idée principale est d'ajouter une dérivée temporelle au niveau de la pression dans l'équation de continuité, fournissant ainsi un couplage direct entre la pression et la vitesse d'écoulement au lieu de résoudre l'équation de poisson ou en rajoutant des termes de compressibilité artificielle par la technique du pas de temps fictif [Shah et Yuan, 2011]. Cette approche de Chorin est utilisée par plusieurs auteurs. Pour leurs applicabilités et performances, on pourra se référer aux travaux de [De Jouette *et al.*, 2002].

La méthode de compressibilité artificielle utilisée dans nos travaux de thèse est basée sur une approche de nombre de Mach faible [Golay et Helluy, 2007a]. Il s'agit d'utiliser une vitesse de son artificielle dans les deux fluides pour le calcul explicite de la pression. Cette vitesse artificielle qui n'a pas de sens physique mais numérique doit être choisie pour avoir un nombre de Mach inférieur à 1/10. Le choix des lois de pression dépend du type d'écoulement considéré. Des lois ont été proposées suivant les deux modèles énergétique ou isotherme. Avec cette approche pragmatique, on évite de rajouter une équation pour l'évaluation de pression comme dans [Braconnier *et al.*, 2009] ou dans [Chorin, 1967].

2.1.4.1 Cas isotherme

Dans le modèle mathématique utilisé dans le cas isotherme, les lois de pression sont obtenues suivant l'équation pour la fraction volumique en forme conservative ou en non conservative. Pour l'approche conservative (Eq.2.12), la loi de pression [Chanteperdrix, 2004] s'écrit de la manière suivant:

$$p = \alpha p_A \left(\frac{\phi \rho}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) p_w \left(\frac{(1 - \phi) \rho}{(1 - \alpha)} \right) \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} p_A &= c_A^2 (\rho - \rho_{0A}) + p_0 \\ p_w &= c_w^2 (\rho - \rho_{0w}) + p_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\alpha \text{ est choisi de telle sorte que } p_A \left(\frac{\rho_A}{\alpha} \right) = p_w \left(\frac{\rho_w}{1 - \alpha} \right)$$

p_0 est la pression de référence, ρ_{0A} et ρ_{0W} sont la densité de l'air et de l'eau à l'initialisation. p_A est la pression dans l'air, p_W est la pression dans l'eau. c_A et c_W représentent respectivement la vitesse du son dans l'air et dans l'eau. L'équation de convection (Eq.2.4) sous sa forme conservative devient:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \rho \bar{u} \phi = 0 \quad (2.12)$$

La vitesse du son est

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p + \pi)}{\rho}} \quad (2.13)$$

Cette vitesse du son artificielle doit être choisie pour satisfaire l'hypothèse de l'incompressibilité de l'écoulement. Cependant il faut noter que ce choix est purement numérique. Afin de gagner en temps de calcul, on utilise fréquemment le système non-conservatif avec la loi de pression:

$$p = c_0^2 \left(\rho - (\phi \rho_A + (1 - \phi) \rho_W) \right) + p_0 \quad (2.14)$$

Dans ce modèle, la pression dépend de la fraction volumique, des densités de l'eau et de l'air et d'une vitesse de son c_0 . Dans [Golay et Helluy, 2007a], il a été montré que cette loi donne de bons résultats si on utilise un schéma non conservatif pour la résolution de l'équation de convection. Les études réalisées dans le cas des écoulements bi-fluides ont montré l'intérêt d'utiliser une telle méthode comparée à la loi de pression dans le cas conservatif.

2.1.4.2 Cas énergétique

Pour le modèle énergétique, on utilise la loi de pression des gaz raides. La pression est calculée à partir de deux paramètres $\gamma(\phi)$, $\pi(\phi)$ proposés par [Saurel et Abgrall, 1999a]. Ces paramètres qui dépendent de la fraction volumique, sont calculées avec les équations (Eq.2.16-18). γ_W , π_W , γ_A , π_A doivent être choisis pour avoir des vitesses de son qui permettraient une approximation 'nombre de Mach faible'.

La vitesse du son est calculée avec l'équation Eq.2.15.

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \quad (2.15)$$

$$p = (\gamma(\phi) - 1) \rho \varepsilon - \gamma(\phi) \pi(\phi) \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\gamma(\phi) - 1} = \phi \frac{1}{\gamma_A - 1} + (\phi - 1) \frac{1}{\gamma_W - 1} \quad (2.17)$$

$$\frac{\gamma(\phi) \pi(\phi)}{\gamma(\phi) - 1} = (\phi - 1) \frac{\gamma_W \pi_W}{\gamma_W - 1} + \phi \frac{\gamma_A \pi_A}{\gamma_A - 1} \quad (2.18)$$

Avec le modèle énergétique, les résultats sont quasi identiques dans le cas de l'hydrodynamique avec ceux obtenus avec le modèle isotherme et il demande beaucoup plus de temps de calcul à cause de l'équation sur l'énergie [Golay et Helluy, 2007a].

2.2 Approximation volumes finis

Nous utilisons ici une approximation volumes finis avec un solveur de Riemann [Toro, 1999]. ou VF-Roe ([Masella *et al.*, 1999], [Buffard *et al.*, 2000], [Toro, 1999]).

2.2.1 Le problème de Riemann

On considère un problème de Riemann (Eq.2.21) avec des conditions initiales du type (Eq.2.22). Pour plus de détails sur cette résolution, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Roux, 2000], [Barberon, 2000], [Toro, 1999] et [Golay et Helluy, 2007a]. Le problème (Eq.2.5) sans l'équation de la fraction volumique est un système hyperbolique de loi de conservation, que l'on peut mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{F}(t, \vec{w})) = S(\vec{w}) \\ \vec{w}(t=0, x) = \vec{w}_0(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

où \vec{w} représente les variables conservatives, \tilde{F} le flux et S le terme source. Pour le modèle physique d'Euler 3D isotherme, on a:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, F(\vec{w}) = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho wu \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

L'approximation volume finis avec le solveur de Riemann permet de résoudre ce système d'équation. Nous nous intéresserons au problème de Riemann lié à notre système décrit au (Eq.2.19). On considère le problème monodimensionnel suivant:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial f(\vec{w})}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.21)$$

Les conditions initiales, constantes par morceaux, sont données par:

$$\vec{w}(t=0, x) = \begin{cases} \vec{w}_L & \text{if } x < 0 \\ \vec{w}_R & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Le système (Eq.2.21) peut aussi s'écrire sous sa forme matricielle avec:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A(\vec{w}) \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.23)$$

où $A(\vec{w})$ représente la matrice jacobienne associée au flux $f(\vec{w})$. Soient λ_k les valeurs propres de $A(\vec{w})$. Soient L et R les indices des états gauche et droit de \vec{w} et $\zeta = x/t$. On montre que, pour le modèle isotherme, 3 des valeurs propres de A sont égales (4 sont égales dans le cas du modèle énergétique).

On dit que \bar{w} est une k-onde de détente (ou de raréfaction) reliant les états \bar{w}_L et \bar{w}_R si elle s'écrit de la manière suivante:

$$\bar{w}(t, x) = \begin{cases} \bar{w}_L & \text{si } \xi \leq \lambda_k(\bar{w}_L) \\ V(\xi) & \text{si } \lambda_k(\bar{w}_L) \leq \xi \leq \lambda_k(\bar{w}_R) \\ \bar{w}_R & \text{si } \xi \geq \lambda_k(\bar{w}_R) \end{cases} \quad (2.24)$$

On dit que \bar{w} est une k-onde de choc ou une k-discontinuité de contact si elle relie les états \bar{w}_L et \bar{w}_R de la manière suivante:

$$\bar{w}(t, x) = \begin{cases} \bar{w}_L & \text{si } x < \sigma t \\ \bar{w}_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases} \quad (2.25)$$

où σ est la vitesse de propagation de la discontinuité vérifiant la relation de Rankine-Hugoniot, c'est-à-dire: $\sigma(\bar{w}_R - \bar{w}_L) = \tilde{F}(\bar{w}_R) - \tilde{F}(\bar{w}_L)$

Deux cas sont alors possibles:

- si $\sigma = \lambda_k(\bar{w}_L) = \lambda_k(\bar{w}_R)$, on a une discontinuité de contact
- si $\lambda_{k-1}(\bar{w}_L) < \sigma < \lambda_k(\bar{w}_L)$ et $\lambda_k(\bar{w}_R) < \sigma < \lambda_{k+1}(\bar{w}_R)$, on a un choc entropique

On peut prouver que si $\bar{w}_L \in F$, alors il existe un voisinage $V(\bar{w}_L)$ de \bar{w}_L dans F tel que si $\bar{w}_R \in V(\bar{w}_L)$, le problème de Riemann admet une solution faible autosemblable (i.e. fonction de x/t) physiquement admissible qui consiste en une succession d'états constants séparés par des ondes de détente, des ondes de choc entropique ou des discontinuités de contact. Une solution faible de ce type est unique.

On peut donc écrire la solution sous la forme:

$$\bar{w}(t, x) = R(x/t, \bar{w}_L, \bar{w}_R)$$

$$\bar{w}(t, x) = \begin{cases} \bar{w}_L & \text{si } \xi < \lambda_1^- \\ \bar{w}_1 & \text{si } \lambda_1^+ < \xi < \lambda_2^- \\ \bar{w}_2 & \text{si } \lambda_2^- < \xi < \lambda_3^- \\ \bar{w}_R & \text{si } \lambda_3^+ < \xi \end{cases} \quad (2.26)$$

où les inconnues sont maintenant \bar{w}_1 et \bar{w}_2 . Les vitesses λ_k^+ satisfont: $\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- < \lambda_3^- \leq \lambda_3^+$ (voir Figure Fig.2.1).

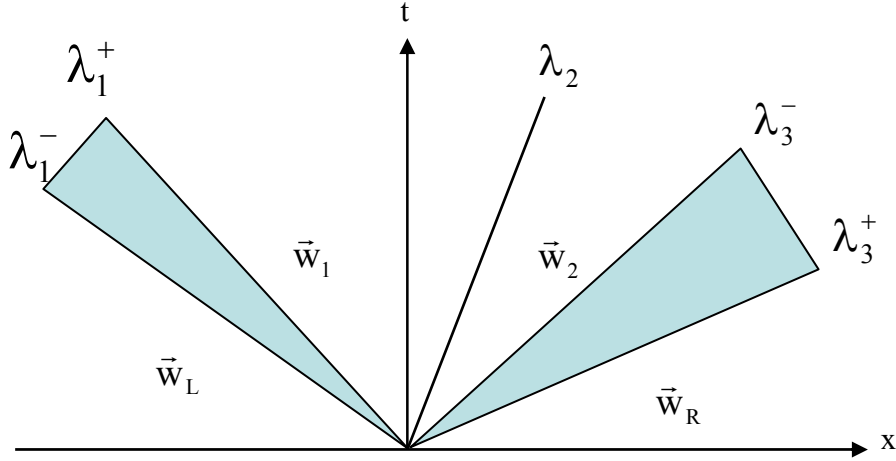


Fig.2.1: Problème de Riemann: Solution dans le plan (x, t)

La valeur propre λ_2 correspond à une discontinuité de contact.

Si $\lambda_k^- < \lambda_k^+$, $k=1, 3$, la k -onde est une k -onde de détente.

Si $\lambda_k^- = \lambda_k^+$, $k=1, 3$, la k -onde est une k -onde de choc de vitesse $\sigma = \lambda_k^- = \lambda_k^+$

On peut montrer que φ reste constante à travers une détente et une onde de choc. φ est donc uniquement modifié à travers la discontinuité de contact, ce qui implique que l'interface est précisément localisée à cette discontinuité. En d'autres termes, les coefficients de la loi d'état ne changent qu'à travers cette onde.

On peut prouver que le problème de Riemann associé au système de lois de conservation de notre problème admet une solution globale.

La résolution de ce problème de Riemann a été menée par plusieurs auteurs ([Toro, 1999], [Godlewski et Raviart, 1996] et [Muron, 2003]). La solution est composée de différents états constants tels que les détente, les chocs, les discontinuités de contact. Pour plus de détail, le lecteur pourra consulter [Rouy, 2000] et [Barberon, 2000].

2.2.2 Discrétisation spatiale

Pour calculer la solution du système (Eq.2.21), une approximation volumes finies est utilisée. Le domaine de calcul Ω (ici supposé être un ouvert borné de \mathbb{R}^2 pour simplifier) est divisé en N sous domaines ou cellules Ω_i , $i \in I = \{1, N\}$ où l'on approche le vecteur inconnu par une constante représentant la valeur moyenne sur la cellule de volume Ω_j :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \overline{\Omega_i} &= \overline{\Omega} \\ \forall (i, j) \in I \times I, i \neq j &\Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \end{aligned} \quad (2.27)$$

En faisant une intégration spatiale sur chaque cellule, le système d'équation (Eq.2.21) avec un terme source $S(\bar{w})$ peut être réécrit sous la forme:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_i} \frac{\partial f(\bar{w})}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega_i} S(\bar{w}) d\Omega \quad (2.28)$$

Si on pose $\bar{w}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \bar{w} d\Omega$, alors l'équation devient en utilisant le théorème de la divergence qui permet de décomposer l'intégrale de la divergence en une somme d'intégrales sur toutes les faces de la cellule (formule de Green):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \bar{w} d\Omega \right) + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega = \int_{\Omega_i} \frac{1}{|\Omega_i|} S(\bar{w}) d\Omega \quad (2.29)$$

où $\partial\Omega_i$ désigne la frontière de Ω_i , n_i la normale extérieure de Ω_i .

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega = \int_{\Omega_i} \frac{1}{|\Omega_i|} S(\bar{w}) d\Omega \quad (2.30)$$

Le terme $\int_{\partial\Omega_i} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega$ représente le flux numérique à travers la frontière du volume de contrôle au temps t et peut être calculé de la manière suivante:

$$\int_{\partial\Omega_i} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega = \sum_{e \in \partial\Omega_i, e = \partial\Omega_{ij}} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_{ij}} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega \quad (2.31)$$

e désigne les arêtes de Ω_i et Ω_j ; Ω_j est une cellule voisine de Ω_i et $\partial\Omega_{ij}$ représente la frontière entre Ω_i et Ω_j (Fig.2.2). La difficulté des méthodes numériques existantes est d'approcher le terme $\int_{\partial\Omega_{ij}} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega$. On introduit un flux numérique F telle que:

$$\int_{\partial\Omega_{ij}} f(\bar{w}) \cdot n_i d\partial\Omega = |e| F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij}) \quad (2.32)$$

où n_{ij} est la normale à $\partial\Omega_{ij}$ dans la direction Ω_j (Fig.2.2).

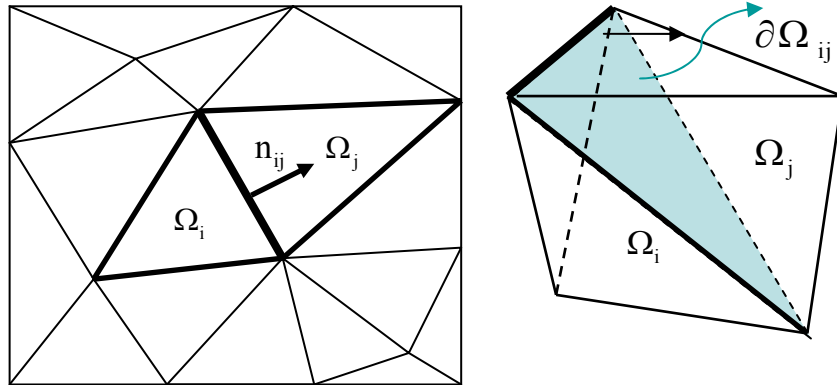


Fig.2.2: Discretisation spatiale: Maillage volumes finis 2D et 3D

$F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij})$ qui est le flux numérique, est généralement approximé par le solveur de Riemann avec la méthode de Godunov. Notre système devient:

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{e \in \partial\Omega_i, e=\partial\Omega_{ij}} |e| F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij}) + \int_{\Omega_i} \frac{1}{|\Omega_i|} S(\bar{w}) d\Omega \quad (2.33)$$

2.2.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle peut se faire de manière explicite ou implicite. La discrétisation implicite permet de s'affranchir des conditions de stabilité de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy) mais conduit à une résolution matricielle à chaque pas de temps. Celle explicite qui évite cette résolution matricielle de grands systèmes doit vérifier la condition de CFL et utilise donc des pas de temps qui sont souvent très petits. Dans le code utilisé, un schéma explicite en temps est utilisé. Comme la discrétisation spatiale, on subdivise l'intervalle de temps $[0, T]$ en N sous intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ de longueur pouvant être variable, on définit un pas de temps par $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{e \in \partial\Omega_i, e=\partial\Omega_{ij}} |e| F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij}) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \frac{1}{|\Omega_i|} S(\bar{w}) d\Omega dt \quad (2.34)$$

Le pas de temps utilisé pour les calculs est un pas de temps global déterminé à partir de la vitesse maximale des ondes convectives sur le maillage. L'étude de stabilité du schéma conduit à une condition CFL et le pas de temps global est donc obtenu comme:

$$\Delta t = \alpha \frac{h}{\|\bar{u}\| + c} \quad (2.35)$$

α représente le coefficient de CFL, h le diamètre de la cellule, c la vitesse du son et $\|\bar{u}\|$ la norme de la vitesse. Avec le premier ordre en temps, la dérivée temporelle est évaluée par la formule:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} dt = \frac{\bar{w}_i^{n+1} - \bar{w}_i^n}{\Delta t_n} \quad (2.36)$$

2.2.3.1 Les schémas de Godunov

Notre système conservatif muni de conditions initiales et conditions aux limites est résolu en utilisant la méthode des volumes finis avec le schéma de Godunov. On a d'après les discrétisations temporelle et spatiale, le système suivant:

$$\bar{w}_i^{n+1} = \bar{w}_i^n - \frac{\Delta t_n}{|\Omega_i|} \sum_{e \in \partial\Omega_i, e=\partial\Omega_{ij}} |e| F(\bar{w}_i^n, \bar{w}_j^n, n_{ij}) + \Delta t_n \int_{\Omega_i} \frac{1}{|\Omega_i|} S(\bar{w}) d\Omega \quad (2.37)$$

Où le flux numérique $F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij})$ est calculé à l'aide de la solution du problème de Riemann exact w_{Riem} dans la direction normale n_{ij} .

$$F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij}) = f(w_{\text{Riem}}(0; \bar{w}_i, \bar{w}_j)) \quad (2.38)$$

Avec $f(\bar{w}) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u, \rho \phi)$ pour le modèle Euler monodimensionnel bi-fluide énergétique. Le système en 1D sans terme source avec un pas de temps constant pourrait alors s'écrire de la forme:

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u)_{i+1/2}^* - (\rho u)_{i-1/2}^* \right) \\ \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho \phi)_{i+1/2}^* - (\rho \phi)_{i-1/2}^* \right) \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u^2 + P)_{i+1/2}^* - (\rho u^2 + P)_{i-1/2}^* \right) \\ (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(((\rho E + P)u)_{i+1/2}^* - ((\rho E + P)u)_{i-1/2}^* \right) \end{cases} \quad (2.39)$$

Les valeurs ρ^*, ϕ^*, u^*, P^* sont données par la solution exacte du problème de Riemann à l'instant t_n . \bar{w}_i^n est la valeur de \bar{w}_i à l'instant t_n . L'indice $i+1/2$ (respectivement $i-1/2$) indique que l'état gauche correspondant est \bar{w}_i^n et l'état droit \bar{w}_{i+1}^n (respectivement \bar{w}_{i-1}^n).

2.2.3.2 Précision d'ordre 2 en temps et en espace

Pour traiter des problèmes comme les déferlements de vagues et de leur impact sur des structures, les schémas numériques d'ordre un en temps et en espace présente une certaine limite. Par exemple, elles ne peuvent pas reproduire correctement le déferlement à cause de grandes diffusions due à leur faible précision. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'approximation d'ordre 2 en temps et en espace pour notre schéma. A ce propos, le lecteur pourra consulter les travaux de Golay et Helluy ([Golay et Helluy, 2007a], [Helluy, 2005]).

Pour la précision en temps, plusieurs types de méthodes existent pour augmenter l'ordre de précision des méthodes. Celle d'Euler du second ordre est utilisée dans ce code. Il s'agit de modifier l'étape d'évolution de la solution de l'instant t_n à l'instant t_{n+1} par une décomposition en deux étapes élémentaires. Elle sera décrite au chapitre trois.

La précision du schéma numérique en espace a été améliorée en adaptant une technique de type MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) [Van Leer, 1979]. Elle fait partie des méthodes les plus populaires et elle est beaucoup utilisée dans les codes industriels. Ce schéma repose sur une reconstruction linéaire par morceaux de la solution approchée.

Supposons que nous avons, pour le modèle isotherme, une approximation du second ordre en temps et en espace de la solution w_i^n de notre système (Eq.2.21) au temps t_n dans la cellule Ω_i . La méthode de Barth pour la solution numérique affine $\tilde{w}_i^n = (\rho_i^n, \bar{u}_i^n, p_i^n)$ dans chaque cellule s'écrit:

$$\tilde{w}^n(x) = \bar{w}_i^n + s_i^n (x - x_i) + \frac{\Delta t_n}{2} r_i^n, \quad x \in \Omega_i \quad (2.40)$$

x_i est le centre de la cellule Ω_i et r_i^n est la dérivée en temps à l'instant t_n de la solution \bar{w}_i^n au centre de la cellule Ω_i .

D'après le problème de Riemann (Eq.2.21), on a:

$$r_i^n = \frac{\partial(\bar{w}_i^n)}{\partial t} = -\frac{\partial f(\bar{w}_i^n)}{\partial x} = -f'(\bar{w}_i^n) s_i^n \quad (2.41)$$

s_i^n la pente ou ‘tenseur de pente’ dans la cellule Ω_i et est donnée par la formule (Eq.2.42).

$$s = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Dans le cas énergétique, ce tenseur est obtenu en rajoutant les dérivées de la fraction volumique ϕ . La dérivée de ϕ s’effectue avec la formule (Eq.2.14). Si x_{ij} est le centre de la surface entre les cellules Ω_i et Ω_j , alors le schéma s’écrit de la forme:

$$\tilde{w}_{ij}^n = \bar{w}_i^n + s_i^n (x_{ij} - x_i) + \frac{\Delta t_n}{2} r_i^n \quad (2.43)$$

Le schéma de Godunov avec la technique MUSCL a été évalué dans [Helluy, 2005]) dans le cas d’un problème bi-fluide et des oscillations ont été observées. Pour la stabilité de ce schéma MUSCL et pour sa robustesse, le lecteur pourra consulter les travaux de Berthon ([Berthon 2005] et [Berthon, 2006]). En présence de ces oscillations, il devient nécessaire d’effectuer une limitation de pente avec le limiteur de Barth [Godlewski et Raviart, 1996] qui est efficace pour ces types de problèmes. Cette méthode consiste à évaluer une approximation du gradient de la solution au barycentre x_i de chaque cellule Ω_i . Ce calcul du gradient pour une variable primitive q_i^n de \bar{w}_i^n s’effectue avec la formule de Green:

$$\int_{\Omega_i} \nabla q d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} q \bar{n} ds = \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{2} (q_i + q_j) \bar{n}_{ij} \quad (2.44)$$

Le gradient sur chaque cellule est alors obtenu avec la formule suivante:

$$\tilde{\nabla} q = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{2} (q_i + q_j) \bar{n}_{ij} \quad (2.45)$$

Pour limiter ce gradient et éviter les oscillations du schéma, on définit une variable α compris entre 0 et 1 et on pose:

$$\tilde{\nabla} q = \alpha \nabla q \quad (2.46)$$

Le limiteur est alors le plus grand réel compris entre 0 et 1 qui vérifie la relation:

$$\alpha \left\| \nabla q_i \cdot (x_{ij} - x_i) \right\| \leq \|q_j - q_i\| \quad (2.47)$$

Le flux numérique $F(\bar{w}_i, \bar{w}_j, n_{ij})$ calculé au paragraphe (2.2.3.1) est remplacé par l’expression $F(\bar{w}_i + \nabla q_i \cdot (x_{ij} - x_i), \bar{w}_j + \nabla q_j \cdot (x_{ji} - x_j), n_{ij})$ et on applique la formule (Eq.2.38). Le limiteur WLSQR (Weighted Least SquaRe), bien que couteux en temps de calcul [Fürst et

Kozel, 2002], est aussi disponible dans le code. L'utilisation de la méthode Barth est privilégiée car étant beaucoup plus rapide et donne des résultats satisfaisants [Golay et Helluy, 2007b].

2.2.3.3 Le schéma non conservatif

Plusieurs études ont montré la non pertinence de la méthode de discrétisation avec un solveur de Riemann exact du système conservatif [Rouy, 2000], [Barberon, 2000], [Golay et Helluy, 2007a] et [Sinilo, 2007]. Des perturbations sont observées au niveau de la vitesse et de la pression autour de l'interface. Elles sont d'autant plus fortes que les rapports de densité et de pression sont élevés, les discontinuités de contact stationnaires qui repèrent l'interface sont mal évaluées. Par exemple, considérons le problème du tube à choc dans un domaine $x \in [-1;1]$. Le tube est initialement rempli de deux fluides de densités différentes. A gauche on impose une pression p_g , une densité ρ_g et une vitesse u_g . A droite on a une pression p_d , une densité ρ_d et une vitesse u_d (Tab.2.1). Le système évolue sur 0.001 seconde et la condition CFL est de 0.7. Un maillage uniforme de 400 cellules suivant x et 1 maille suivant y et z est utilisé.

variable	Etat droit $x > 0.5$	Etat gauche $x < 0.5$
Vitesse	$u_d = 50$	$u_g = 50$
	$v_d = w_d = 0$	$v_g = w_g = 0$
densité	$\rho_d = 1$	$\rho_g = 10$
pression	$p_g = 10^5$	$p_g = 1.1 * 10^5$
fraction	$\phi_d = 0$	$\phi_g = 1$
Loi de pression	$\pi_d = 0$	$\pi_g = 0$
	$\gamma_A = 1.4$	$\gamma_w = 1.1$

Tab.2.1: Tube à choc: Conditions aux limites

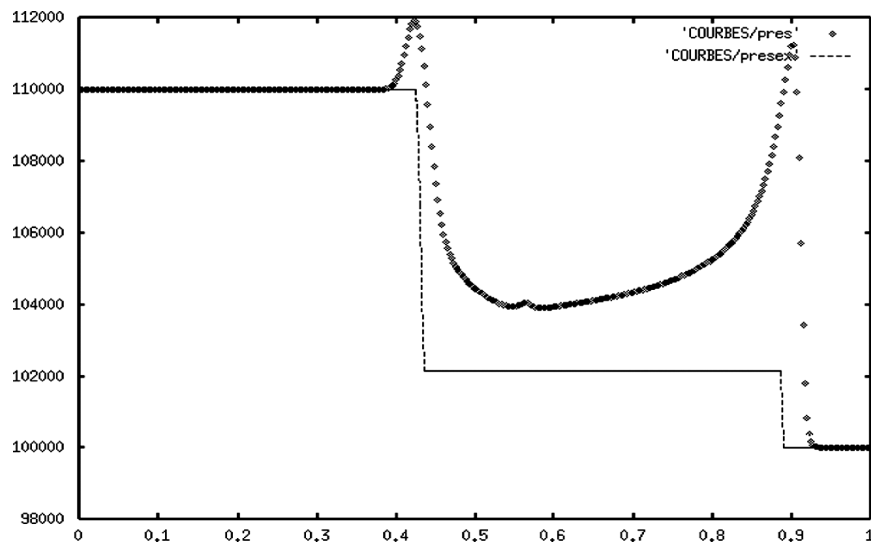


Fig.2.3: Tube à choc: Profil de la pression avec le schéma de Godunov, exact (ligne), numérique (pointillé) [Golay et Helluy, 2007a]

Si on considère le modèle d'Euler (Eq.2.5) muni de la loi de pression isotherme (Eq.2.14) et si on applique le schéma de Godunov pour calculer la solution de ce problème de Riemann, on obtient le résultat pour la pression représentée à la figure Fig.2.3.

Pour améliorer le calcul au niveau de l'interface afin de mieux préserver les discontinuités de contact, Abgrall [Abgrall, 1996] et Saurel [Saurel et Abgrall, 1999a] ont proposé une méthode basée sur une formulation non conservative de la fraction volumique. Ils ont construit ce schéma en se basant sur la remarque de Karni [Karni, 1996] décrite dans [Rouy, 2000] selon laquelle l'évolution de la pression dépend uniquement des gradients de vitesse et de pression. A travers une discontinuité de contact, ces gradients sont nuls, ce qui signifie que la pression doit rester constante. La formulation mathématique de cette remarque est:

$$\{u_i^n = u \text{ et } P_i^n = P\} \Rightarrow \{u_i^{n+1} = u \text{ et } P_i^{n+1} = P\} \quad \forall i \quad (2.48)$$

Le schéma proposé par Abgrall et Saurel vérifie cette assertion.

Pour le modèle énergétique:

Les équations conservatives de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie deviennent avec les schémas de Godunov:

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u)_{i+1/2}^n - (\rho u)_{i-1/2}^n \right) \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u^2 + P)_{i+1/2}^n - (\rho u^2 + P)_{i-1/2}^n \right) \\ (\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(((\rho E + P)u)_{i+1/2}^n - ((\rho E + P)u)_{i-1/2}^n \right) \end{cases} \quad (2.49)$$

L'indice $i+1/2$ est utilisé pour désigner les solutions du problème de Riemann à l'interface entre les cellules i et $i+1$.

Nous imposons maintenant le fait que le schéma doit préserver les discontinuités de contact:

$$u_i^{n+1} = u_i^n = u \text{ et } P_i^{n+1} = P_i^n = P \quad (2.50)$$

Ainsi nous obtenons:

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left(\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i-1/2}^n \right) \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u^2 + P)_{i+1/2}^n - (\rho u^2 + P)_{i-1/2}^n \right) \\ (\rho \varepsilon)_i^{n+1} = (\rho \varepsilon)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left((\rho \varepsilon)_{i+1/2}^n - (\rho \varepsilon)_{i-1/2}^n \right) \end{cases} \quad (2.51)$$

Or d'après l'équation sur la pression (Eq.2.16-18), on a:

$$\rho \varepsilon = P \left(\varphi \frac{1}{\gamma_A - 1} + (\varphi - 1) \frac{1}{\gamma_w - 1} \right) + (\varphi - 1) \frac{\gamma_w \pi_w}{\gamma_w - 1} + \varphi \frac{\gamma_A \pi_A}{\gamma_A - 1} \quad (2.52)$$

De ces relations, nous nous en déduisons:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left(\varphi_{i+1/2}^n - \varphi_{i-1/2}^n \right) \quad (2.53)$$

Pour des pressions p et vitesse u constantes, ce schéma préserve les discontinuités de contact. On définit en premier lieu les valeurs des variables à l'interface en résolvant le problème de Riemann associé.

$$\bar{w}_{i+1/2}^n = R(0; \bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n) \quad (2.54)$$

Pour les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, on utilise la méthode classique (Eq.2.50).

Un schéma Upwind [Coquel *et al.*, 1997] non conservatif est utilisé pour la fraction volumique. C'est un schéma non conservatif basé sur les discontinuités de contact pour la vitesse du problème de Riemann résolu aux points $x_{i+\frac{1}{2}}$, il s'écrit:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\min(u_{i+1/2}^n, 0) (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) + \max(u_{i-1/2}^n, 0) (\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n) \right) \quad (2.55)$$

Pour le modèle isotherme:

Pour les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, on utilise le schéma de Godunov classique et un schéma Upwind non conservatif pour la fraction volumique, on a:

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u)_{i+1/2}^n - (\rho u)_{i-1/2}^n \right) \\ (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u^2 + P)_{i+1/2}^n - (\rho u^2 + P)_{i-1/2}^n \right) \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\min(u_{i+1/2}^n, 0) (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) + \max(u_{i-1/2}^n, 0) (\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n) \right) \quad (2.57)$$

Ce schéma préserve comme précédemment les discontinuités de contact. La figure Fig.2.4 présente la solution du problème de Riemann dont les données ont été décrites dans le tableau Tab.2.1. On voit l'apport de cette méthode non conservative par rapport à celle de Godunov décrite au paragraphe précédent (cf.2.2.3.1).

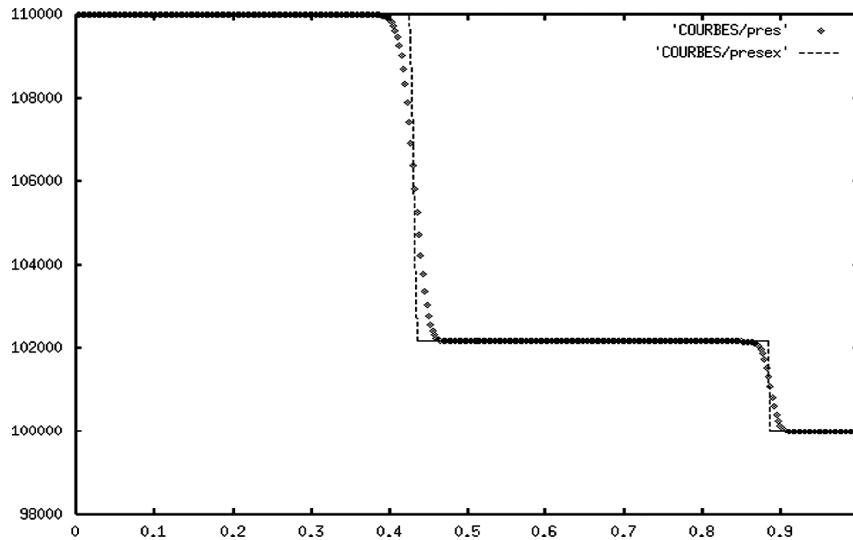


Fig.2.4: Tube à choc: Profil de la pression avec le schéma non conservatif de Saurel-Abgrall, exact (ligne), numérique (pointillé) [Golay et Helluy, 2007a]

2.3 Le code de calcul

Ce chapitre décrit les modèles mathématiques et numériques disponibles dans le code au point de départ de cette thèse. Les méthodes numériques considérées sont de type volumes finis où le développement de schémas numériques se ramène à la résolution approchée du problème de Riemann monodimensionnel. Les deux stratégies de construction du schéma numérique pour des équations conservatives et non conservatives ont été décrites.

Ce modèle bi-fluide a été validé avec des mesures expérimentales et numériques dans le cas d'un déferlement d'une onde solitaire provoquée par la présence d'un récif immergé. Les comparaisons numériques avec d'autres modèles mathématiques ont permis d'évaluer la pertinence de cette méthode de compressibilité artificielle à faible Mach et sa rapidité [Helluy *et al.*, 2005]. L'application de cette méthode dans le cas d'un déferlement tridimensionnel de vague dans une pente de 1/15 a montré la capacité du code à traiter les écoulements incompressibles coûteux en temps de calcul [Golay et Helluy, 2007a].

Outre le modèle Euler 3D bi-fluide incompressible, on dispose aussi dans ce code CFD le système d'équations tridimensionnelles de Navier-Stokes pour les écoulements fluides stationnaires ou instationnaires. Les fluides peuvent être compressibles, incompressibles et visqueux. Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ est disponible dans ce code.

Les maillages, composés de triangles, de tétraèdres ou d'hexaèdres, peuvent être non structurés. Cet aspect est important si on veut traiter des problèmes industriels avec des géométries complexes. Le temps de travail pour l'ingénieur ou pour le chercheur de générer un maillage structuré dans ces types de problèmes est important comparé au temps de travail pour la réalisation d'un maillage non structuré. Pour le premier, il est souvent nécessaire de décomposer le domaine par bloc.

Les modèles numériques dans ce code sont basées sur une approximation par volumes finis avec les schémas de Godunov, de Rusanov et de VF-Roe. La discrétisation en temps est assurée par la méthode d'intégration d'Euler ou de Runge-Kutta.

Une autre caractéristique du code est son implémentation en MPI, l'utilisation du module permettant de faire des calculs parallèles réduit les coûts de calcul. Son efficacité pour des écoulements tridimensionnels a été explorée dans [Golay et Helluy, 2007a] et dans [Sambe *et al.*, 2011b]. Dans [Sambe *et al.*, 2011b], le maillage du domaine de calcul était de 9 millions de cellules et est reparti sur 12 processeurs.

Cependant la gestion des temps de calcul reste une problématique dans les codes CFD pour traiter des problèmes aux grandes échelles à temps réels, dans les deux prochains chapitres, on présentera les travaux effectués lors de cette thèse concernant l'amélioration des temps de calcul de ce code.

Partie 2

Contributions sur les méthodes de résolution multi-échelle et sur les techniques de raidissement d'interface

Table des matières

3.	LES METHODES NUMERIQUES MULTI-PAS	67
3.1	Les méthodes numériques à un pas	67
3.2	Approche multi-pas, cas général	69
3.3	La méthode d'Adams-Bashforth	70
3.4	Algorithme de l'approche multi-pas	72
4.	LES METHODES D'ADAMS-BASHFORTH MULTI-ECHELLE	75
4.1	Modèle numérique.....	76
4.2	Résolution numérique de la méthode	78
4.3	Algorithme de l'approche multi-échelle	79
4.4	Exemple avec trois cellules	81
5.	LES TECHNIQUES DE COMPRESSION D'INTERFACE	83
5.1	La méthode de Kaceniauskas	84
5.2	La méthode de Olsson	84
5.3	La méthode de Kokh	85
5.4	Choix d'une méthode de compression	86
5.5	Résolution numérique de la méthode de Kokh	87
5.6	Algorithme et programmation de la méthode	88

3. Les méthodes numériques multi-pas

Dans le code 3D précédemment présenté, une intégration en temps avec la méthode d'Euler d'ordre 2 est utilisée. Avec cette méthode, le pas de temps était déterminé par la plus petite cellule du maillage, ce qui est préjudiciable dans le cas de raffinement de maillage où les tailles des cellules du maillage peuvent être très différentes. C'est pourquoi dans cette thèse, un des objectifs était de développer une méthode d'intégration en temps couplée à une gestion efficace des pas de temps locaux. Cette approche originale a été testée initialement avec succès dans le cas des éléments finis discontinus en magnéto-hydro-dynamique par [Altmann *et al.*, 2009]. Cela nécessite d'abord de développer des méthodes d'intégration basées sur des stockages de données intermédiaires lors du processus de calcul. Une des méthodes numériques qui permet cette approche est la méthode d'Adams Bashforth. Dans cette partie, cette méthode est étudiée et dans le prochain chapitre on se consacrera à l'approche multi-échelle.

3.1 Les méthodes numériques à un pas

Dans cette section, on fait un bref rappel de quelques méthodes numériques à un pas. comme par exemple la méthode de Runge Kutta [Cockburn et Shu, 2001].. Pour simplifier, on présente la méthodologie sur un problème scalaire; les calculs étant identiques pour un système 2D ou 3D. On considère le modèle scalaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = F(t, \bar{U}(t)), t \in I \\ \bar{U}(t_0) = \bar{U}^0 \end{cases} \quad (3.1)$$

On obtient en intégrant (Eq.3.1):

$$\bar{U}(t) - \bar{U}(t_0) = \int_{t_0}^t F(\tau, \bar{U}(\tau)) d\tau \quad (3.2)$$

Parmi les méthodes à un pas, celle d'Euler est l'algorithme le plus simple permettant de trouver une solution numérique à cette équation différentielle ordinaire. Elle donne en général des résultats peu précis mais est à la base de toutes les méthodes sophistiquées. Afin d'intégrer le système (Eq.3.1), on subdivise l'intervalle de temps $[0, T]$ en N sous intervalles de temps $[t_n, t_{n+1}]$, on définit un pas de temps par $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$. En intégrant ce système, on obtient:

$$\bar{U}(t_{n+1}) - \bar{U}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, \bar{U}(t)) dt \quad (3.3)$$

Toute méthode explicite à un pas approchant (Eq.3.1) peut être mise sous la forme:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t \Phi(t_n, \bar{U}(t_n), \Delta t) \quad (3.4)$$

Avec Δt_n le pas de temps, $\bar{U}(t_n)$ la solution à l'instant t_n et $\Phi(t_n, \bar{U}(t_n), \Delta t_n)$ le flux à l'instant t_n . Si Δt_n est suffisamment petit, on peut écrire (Eq.3.1) sous sa forme approchée du premier ordre en temps par:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n F(t_n, \bar{U}(t_n)) \quad (3.5)$$

avec $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

Une façon d'améliorer la méthode d'Euler est de faire une meilleure approximation du membre de droite de l'équation différentielle. Pour cela, une solution intermédiaire à l'instant $t_{n+1/2} = t_n + \frac{\Delta t_n}{2}$ est calculée et on a alors d'après (Eq.3.5):

$$\bar{U}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) = \bar{U}(t_n) + \frac{\Delta t_n}{2} F(t_n, \bar{U}(t_n)) \quad (3.6)$$

On obtient la formule d'Euler modifiée ou méthode du point milieu:

$$\bar{X}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) = \bar{U}(t_n) + \frac{\Delta t_n}{2} F(t_n, \bar{U}(t_n)) \quad (3.7)$$

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n F\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{X}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right) \quad (3.8)$$

Une autre façon d'améliorer la méthode d'Euler est d'utiliser un processus de prédiction correction. Supposons qu'on prenne la moyenne du membre de droite sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, on a alors:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \frac{\Delta t_n}{2} \left[F(t_n, \bar{U}(t_n)) + F(t_{n+1}, \bar{U}(t_{n+1})) \right] \quad (3.9)$$

La difficulté est que $F(t_{n+1}, \bar{U}(t_{n+1}))$ ne peut être évalué que lorsque $\bar{U}(t_{n+1})$ est connu, terme qui est précisément la quantité recherchée. On peut alors estimer cette valeur par la formule d'Euler (Eq.3.5), obtenir $F(t_{n+1}, \bar{U}(t_{n+1}))$ que l'on utilisera dans l'équation ci-dessus pour calculer $\bar{U}(t_{n+1})$. On obtient la description du processus de prédiction correction appelée la méthode de Heun:

$$\text{Prédiction d'Euler: } \bar{X}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n F(t_n, \bar{U}(t_n)) \quad (3.10)$$

$$\text{Correcteur: } \bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \frac{\Delta t_n}{2} \left[F(t_n, \bar{U}(t_n)) + F(t_{n+1}, \bar{X}(t_{n+1})) \right] \quad (3.11)$$

On voit que les contraintes des méthodes à un pas résident dans leur formulation mathématique. La valeur de $\bar{U}(t_{n+1})$ est déterminée à chaque pas de façon explicite en fonction uniquement du point $\bar{U}(t_n)$. Ces méthodes n'utilisent pas les informations sur les

variables calculés précédemment mais des variables intermédiaires sont calculées pour augmenter leurs précisions comme dans le cas de la méthode d'Euler d'ordre 2 (Eq.3.7-8), ce qui augmente les temps de calculs. Par exemple, si la méthode choisie est d'ordre k , il est nécessaire de faire k calculs de flux sur toutes les cellules du domaine pour évaluer la solution au pas de temps suivant. Avec ces méthodes, l'approche multi-échelle ne peut pas s'appliquer aisément.

3.2 Approche multi-pas, cas général

Afin d'économiser le temps de calcul nécessaire aux étapes intermédiaires de la méthode de Runge-Kutta, nous abordons maintenant la présentation de schémas multi-pas qui autoriseront une approche multi-échelle.

Pour construire des schémas multi-pas, le principe est de chercher une formule du type:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{s-1} a_k \bar{U}(t_{n-k}) + \Delta t_n \sum_{k=-1}^{s-1} b_k F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})) \quad (3.12)$$

La première somme donne une approximation de la dérivée temporelle, la deuxième une approximation des valeurs de $F(t, \bar{U})$. Les coefficients sont ensuite déterminés de façon à rendre la formule stable et consistante pour un nombre de pas s donné. On fait varier l'indice de sommation k de -1 à $s-1$: le point t_{n+1} et la valeur $\bar{U}(t_{n+1})$ peuvent apparaître à droite; le schéma sera alors implicite. On peut donner un très grand nombre de formules construites sur cette idée. Nous donnons ici les deux schémas d'Adams parmi les plus utilisés.

Pour ces deux types de schémas, on a: $a_0 = 1$, $a_k = 0$ pour $k=1, s-1$. D'après (Eq.3.12), on a:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n \sum_{k=0}^{s-1} b_k F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})) + b_{-1} F(t_{n+1}, \bar{U}(t_{n+1})) \quad (3.13)$$

Si $b_{-1} \neq 0$, on a les méthodes implicites d'Adams-Moulton et si $b_{-1} = 0$, on obtient les schémas explicites d'Adams-Bashforth.

La méthode multi-pas (Eq.3.12) est consistante si et seulement si les coefficients satisfont les relations algébriques:

$$\sum_{k=0}^{s-1} a_k = 1, \quad -\sum_{k=0}^{s-1} k a_k + \sum_{k=-1}^{s-1} b_k = 1 \quad (3.14)$$

Si de plus $y \in C^{s+1}(I)$ pour $s \geq 1$, où y est la solution du problème de Cauchy (Eq.3.1), alors la méthode est d'ordre q si et seulement si, en plus de la consistance, les relations (Eq.3.15-18) sont vérifiées.

$$\sum_{k=0}^{s-1} (-k)^i a_k + i \sum_{k=-1}^{s-1} (-k)^{i-1} b_k = 1; \quad i=2, \dots, q \quad (3.15)$$

La méthode multi-pas (Eq.3.12) est zéro-stable si:

$$\exists \Delta t > 0, \exists C > 0: \forall h \in [0, \Delta t], \left| \bar{Z}(t_n)^h - \bar{U}(t_n)^h \right| \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq n \leq N_h \quad (3.16)$$

où $N_h = \max\{n: t_n + T\}$, et où $\bar{Z}(t_n)^h$, $\bar{U}(t_n)^h$ sont respectivement les solutions des problèmes suivants (Eq.3.17-18):

$$\begin{cases} \bar{Z}(t_{n+1})^h = \sum_{k=0}^{s-1} a_k \bar{Z}(t_{n-k})^h + h \sum_{k=-1}^{s-1} b_k F(t_{n-k}, \bar{Z}(t_{n-k})^h) + h\delta_{n+1} \\ \bar{Z}(t_i)^h = \bar{W}(t_i)^h + \delta_i, \quad i=0, \dots, s-1. \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \bar{U}(t_{n+1})^h = \sum_{k=0}^{s-1} a_k \bar{U}(t_{n-k})^h + h \sum_{k=-1}^{s-1} b_k F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})^h) \\ \bar{U}(t_i)^h = \bar{W}(t_i)^h, \quad i=0, \dots, s-1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour $s-1 \leq n \leq N_h - 1$, où $|\delta_k| \leq \varepsilon$, $0 \leq k \leq N_h$, $\bar{W}(t_0)^h = \bar{U}(t_0)^h$ et où

$\bar{W}(t_k)^h$, $k=1, \dots, s-1$ sont $s-1$ valeur initiales construites à partir d'un autre schéma numérique.

On peut montrer que pour une méthode multi-pas consistante, la condition de racines est équivalente à la zéro-stabilité.

On peut également montrer qu'une méthode multi-pas consistante est convergente si et seulement si elle satisfait la condition de racines et si l'erreur sur les données initiales tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. De plus, la méthode converge avec un ordre q si elle est d'ordre q et si l'erreur sur les données initiales est un $\theta(\Delta t_n^q)$.

3.3 La méthode d'Adams-Bashforth

La méthode d'Adams-Bashforth est une méthode multi-pas de type (Eq.3.13), c'est-à-dire une méthode pour laquelle la solution numérique au temps t_{n+1} dépend de la solution aux instants précédents $(t_{n-k}, F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})))$, $k=0, s-1$ si s est l'ordre de la méthode. Dans cette méthode, des polynômes d'interpolation d'ordre supérieur à 1 sont utilisés pour approximer $F(t, \bar{U})$. Par exemple, pour la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre s , la fonction $F(t, \bar{U})$ est approximée par une interpolation polynomiale du même ordre avec les point aux instants t_n à t_{n+1-s} [Hairer *et al.*, 1993].

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dt = \bar{U}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, \bar{U}) dt \quad (3.19)$$

$$F(t, \bar{U}) \approx \sum_{k=0}^{s-1} L_k(t) F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})) \quad (3.20)$$

avec

$$L_k(t) = \prod_{j=0, j \neq k}^{s-1} \left[\frac{(t - t_{n-j})}{(t_{n-k} - t_{n-j})} \right], \quad k=0, s-1 \quad (3.21)$$

$L_i(t)$: les polynômes de Lagrange, si on pose:

$$b_k(\Delta t_n) = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_k(t) dt \quad (3.22)$$

Le schéma s'écrit:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n \sum_{k=0}^{s-1} b_k(\Delta t_n) F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})) \quad (3.23)$$

Δt_n est le pas de temps à t_n , $\bar{U}(t_n)$ la solution à t_n , $b_k(\Delta t_n)$ les termes de Lagrange à t_n et $F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k}))$ le flux à l'instant t_{n-k} . A chaque pas de temps, on garde en mémoire les flux numériques et les pas de temps calculés précédemment: $\Delta t_{n-k}, F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})); k = 0, s-1$.

Les méthodes d'Adams-Bashforth d'ordre 2 et 3 sont stables pour des CFL inférieures à 1 [Allahviranloo *et al.*, 2007].

Par exemple avec la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2, on a deux points d'interpolations: $(t_{n-1}, \bar{U}(t_{n-1}))$ et $(t_n, \bar{U}(t_n))$

Les polynômes d'interpolation de Lagrange sont:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1} \\ L_1(t) &= \frac{t - t_n}{t_n - t_{n-1}} \quad t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les termes de Lagrange sont:

$$\begin{aligned} b_0(\Delta t_n) &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_0(t) dt = \frac{1}{\Delta t_n} \frac{1}{2} \frac{(t_{n+1} - t_{n-1})^2 - (t_n - t_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \\ b_1(\Delta t_n) &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_1(t) dt = \frac{1}{\Delta t_n} \frac{1}{2} \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{t_{n-1} - t_n} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si Δt_n est constant, alors on a:

$$b_0(\Delta t_n) = -\frac{1}{2}, \quad b_1(\Delta t_n) = \frac{3}{2} \quad (3.26)$$

Et on obtient le schéma suivant:

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \Delta t_n \sum_{k=0}^1 b_k(\Delta t_n) F(t_{n-k}, \bar{U}(t_{n-k})) \quad (3.27)$$

$$\bar{U}(t_{n+1}) = \bar{U}(t_n) + \frac{\Delta t_n}{2} [3F(t_n, \bar{U}(t_n)) - F(t_{n-1}, \bar{U}(t_{n-1}))] \quad (3.28)$$

Si $s=1$, on a la méthode d'Euler progressive qui est d'ordre 1.

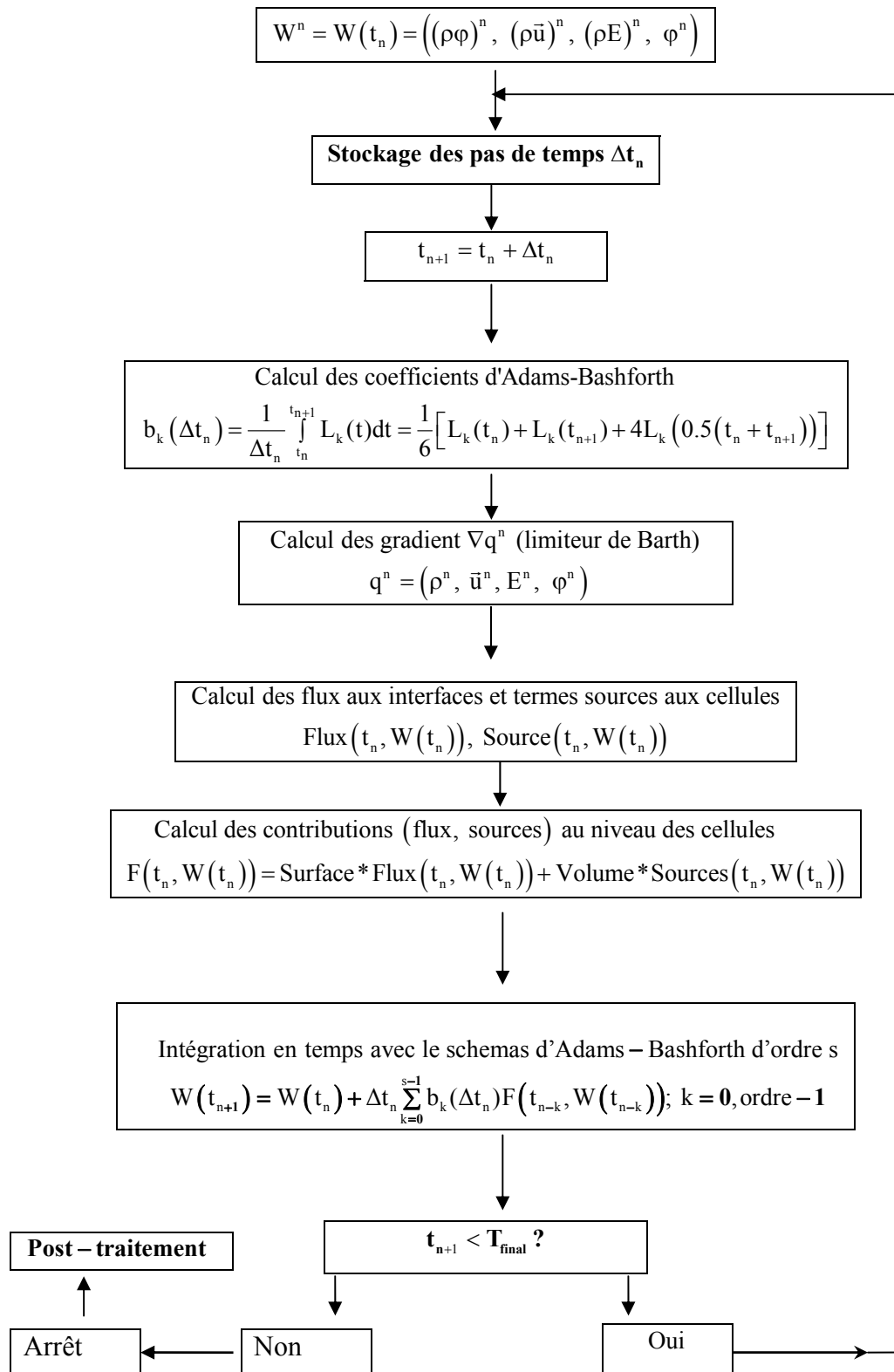
3.4 Algorithme de l'approche multi-pas

La programmation et l'algorithme de la méthode d'Adams-Bashforth nécessite trois étapes. Après stockage des pas de temps locaux qui vérifient les conditions de type CFL, la première étape consiste à calculer les coefficients $b_k(\Delta t_n)$ de la méthode définis dans l'équation (Eq.3.22). Ceci se fait par la méthode de Simpson d'ordre 5 pour assurer une bonne précision. Avec les flux numériques calculés au niveau des faces du maillage et les termes sources au niveau des cellules, on calcule, dans la seconde étape, les contributions de ces deux grandeurs qui représentent une sommation des termes sources et flux et on les stocke au niveau des cellules. Les contributions précédentes sont aussi stockées. Notons aussi que pour l'ordre 2 en espace, la méthode MUSCL avec le limiteur de Barth est utilisée.

La dernière étape consiste à faire une mise à jour des variables conservatives à l'aide de la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre s via la formule (Eq.3.23). Pour les $s-1$ premiers pas de temps, la formule n'est pas définie et on utilise un schéma d'ordre inférieur.

Pour résumer les différentes étapes utilisées dans la résolution numérique des équations avec la méthode d'Adams-Bashforth, on donne l'algorithme synthétisé suivant:

✓ **Algorithme pour la méthode d'Adams-Bashforth**



4. Les méthodes d'Adams-Bashforth multi-échelle

Dans les calculs de CFD, souvent le domaine de calcul n'est pas maillé de manière uniforme. Dans les endroits où la physique est un peu compliquée, le maillage y est raffiné. Etant donné que le pas de temps est calculé en fonction du maillage, le raffinement nécessite un recalcul du pas de temps et de l'adapter pour chaque cellule de maillage. L'intérêt des méthodes multi-pas est qu'elle permet ce type d'adaptation. Elle permet dès lors d'optimiser le nombre d'itérations pour le calcul des flux numériques liés au système et on diminue ainsi les coûts de calcul. Elle est d'autant plus bénéfique que si le raffinement de maillage est très local, par exemple dans les écoulements à couches limite où des lois de parois interviennent.

Toujours dans l'optique de réduire les temps de calcul, on s'intéresse, dans cette partie, à une approche multi-échelle en utilisant la méthode d'Adams-Bashforth précédemment décrite. Elle permet de réduire les temps de calcul. Avec cette méthode, on a la possibilité d'utiliser des pas de temps différents d'une cellule à l'autre [Müller et Stiriba, 2007], ce qui permet d'avoir des gains en temps de calcul importants lorsque de petites cellules sont mélangées avec de grandes cellules. Elle est donc très efficace lorsque l'on veut faire un raffinement local de maillage (par exemple: pour mieux capturer l'interface dans le modèle bi-fluide). L'idée originale a été proposée par Osher et Sanders [Osher et Sanders, 1983] avec un système hyperbolique et est basée sur une description hiérarchique de la géométrie et consiste à attribuer à chaque cellule un niveau de CFL. Cette méthode a été développée par Cohen ([Cohen *et al.*, 1999] et [Cohen *et al.*, 2003]) dans le contexte des systèmes conservatifs. Initialement conçue pour un schéma explicite [Cohen *et al.*, 2003], elle a été étendue avec succès à un schéma semi-implicite dans [Andrianov *et al.*, 2007] et [Coquel *et al.*, 2006] mais aussi dans le cas des méthodes de projection lagrangienne décrite dans [Coquel *et al.*, 2010].

Le maillage consiste à discrétiser le domaine de calcul. La résolution de la grille de maillage concerne plus particulièrement les zones qui présentent de forts gradients des variables physiques ou les zones qui présentent une certaine discontinuité. Pour une bonne résolution de la description des phénomènes physiques qui existent dans ces zones (ondes de choc, interfaces, fronts ou phénomènes de couche limite), un raffinement de maillage est nécessaire vu que la précision des calculs augmente avec l'utilisation des maillages fins. Ces zones d'irrégularités sont souvent petites par rapport à la taille du domaine total de calcul. Il est souvent difficile de déterminer ces zones à l'avance. Le recours à l'adaptation automatique de maillage peut constituer une alternative intéressante. En effet, il existe dans la littérature des algorithmes d'adaptation de maillage automatique [Müller, 2002]. Ces algorithmes permettent de réduire ou d'augmenter la résolution du maillage dans des régions spécifiques du domaine de calcul [Nguyeng, 2009]. Ce dernier utilise une approche multi-échelle avec une adaptation dynamique de maillage dans le cas des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières où existe une grande singularité entre les cellules de maillages et a montré la rapidité et la performance de ces méthodes.

Pour les problèmes de déferlement de vagues qui représentent notre thème principal dans cette thèse, ces méthodes constituent aussi un usage économique car le processus de déferlement nécessite des échelles de maillages différentes si on veut capter toutes les caractéristiques de la physique.

Avec un raffinement local de maillage automatique ou statique, la construction de ces méthodes numériques multi-échelle est toujours nécessaire pour gagner en temps de calcul. Dans le paragraphe suivant, une méthode multi-échelle en temps qui répond à cette thématique est décrite.

4.1 Modèle numérique

On reprend la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre s étudiée précédemment (Eq.3.23). Pour l'approche multi-échelle, les pas de temps seront réévalués par rapport au diamètre des cellules. La plus petite maille est affectée au plus petit pas de temps, qu'on appellera le micro pas de temps ou pas de temps global. La plus grande cellule aura le pas de temps maximal ou macro pas de temps. Par exemple pour le maillage suivant (Fig.4.1), on dispose trois niveaux de raffinement. Les premiers niveaux (grilles gauches) doivent avoir, si on se base sur un critère géométrique, des pas de temps plus grands par rapport aux cellules de niveaux inférieurs (grilles droite).

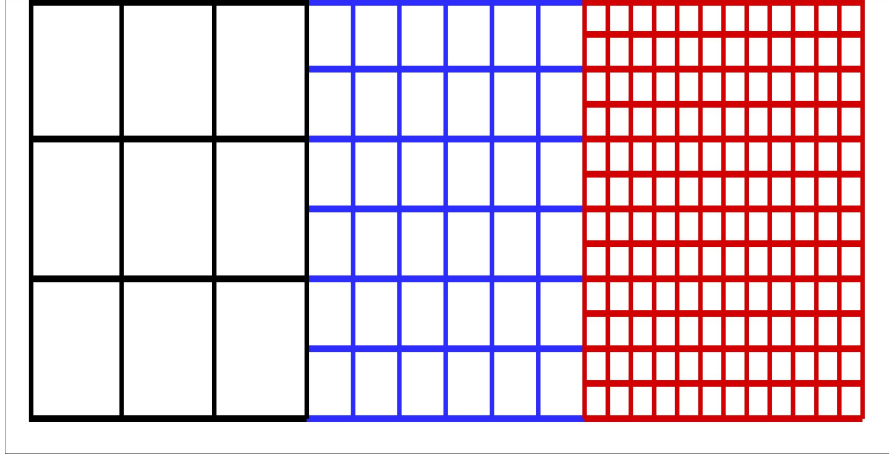


Fig.4.1: Approche multi-échelle: Exemple de hiérarchie de maillage

✓ Calcul des pas de temps locaux

On calcule les pas de temps de chaque cellule de notre domaine de calcul. Le pas de temps est dicté par la plus petite taille de cellule. Soit C_i une cellule de volume $|C_i|$ et de surface $|\partial C_i|$, on définit son diamètre:

$$h_{C_i} = \frac{|C_i|}{|\partial C_i|} \quad (4.1)$$

On définit le diamètre minimal et maximal du maillage:

$$h_{\min} = \min_{C_i \in \Omega} (h_{C_i}) \quad (4.2)$$

$$h_{\max} = \max_{C_i \in \Omega} (h_{C_i}) \quad (4.3)$$

On définit son niveau de CFL en regroupant les cellules de taille comparable:

$$\text{Level}(C_i) = n \quad (4.4)$$

$$\text{si } 2^n h_{\min} \leq h_{C_i} < 2^{n+1} h_{\min} \quad (4.5)$$

Le niveau maximal est:

$$N = \left\lceil \log_2 \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \right) \right\rceil \quad (4.6)$$

Soit S_{ij} une face entre les deux cellules C_i et C_j , on définit le niveau de CFL des faces par:

$$\text{Level}(S_{ij}) = \min(\text{Level}(C_i), \text{Level}(C_j)) \quad (4.7)$$

Avec l'approche multi-échelle, pour chaque cellule C_i , le pas de temps correspondant est:

$$\Delta t(C_i) = 2^{\text{Level}(C_i)} \Delta t_n \quad (4.8)$$

On remarque que:

$$\Delta t(C_i) \geq \text{CFL} \frac{h_{\min}}{\|\bar{u}_{\max}\|} = \Delta t_{\min} \quad (4.9)$$

\bar{u}_{\max} est la vitesse maximale. Le pas de temps maximal est $\Delta t = 2^N \Delta t_n$.

✓ Calcul des flux numériques

Un aspect important de cette méthode est l'évaluation des flux entre les cellules adjacentes. Cette évaluation doit être effectuée afin de bien mettre à jour la solution $\bar{U}(t_{n+1})$ à partir de $\bar{U}(t_n)$. Pour une face ∂C_i de niveau de CFL $\text{Level}(\partial C_i)$, on calcule l'intégrale du terme de flux F sur cette face sur un intervalle de temps de longueur $2^{\text{Level}_{\max} - \text{Level}(\partial C_i)} \Delta t_n$ (Level_{\max} est le niveau de CFL maximal du maillage) et le distribue aux deux faces voisines. Avec ce calcul de flux, la méthode reste conservative [Mathis, 2010]. Pour le calcul des termes sources, on fait la même procédure et cette fois ci on raisonne avec les cellules. Pour cette méthode multi-échelle, on a par exemple pour les cellules C_j de niveau de CFL i et d'après (Eq.3.27), on a $m=i$, Level_{\max}

$$\bar{U}(t_n + 2^m \Delta t_n) = \bar{U}(t_n) + 2^m \Delta t_n \sum_{k=0}^{s-1} b_k(2^m \Delta t_n) F(t_n - k 2^m \Delta t_n, \bar{U}(t_n - k 2^m \Delta t_n)) \quad (4.10)$$

Pour la solution au temps $t_n + 2^N \Delta t_n$, cela nécessite 2^{N-i} de calcul pour les flux. On remarque qu'avec cette formule, les flux sont calculés un plus grand nombre de fois sur les petites cellules que sur les grandes. Par exemple pour chaque cellule C_j , les flux seront calculés $2^{\text{Level}_{\max} - i}$ fois. Sans la méthode multi-échelle, on calculerait $2^{\text{Level}_{\max}}$ fois les flux pour ces cellules. Avec cette méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle, à la fin du plus grand pas de temps, toutes les cellules sont mises à jour ensemble.

✓ Consistance, stabilité et convergence

La stabilité du système est contrôlée par la condition CFL (Eq.4.15). Cette approche a toutefois quelques inconvénients. Du point de vue numérique, il est nécessaire de bien calculer et d'actualiser les champs entre des mailles de niveaux différents, car à l'interface de

deux mailles de niveau de CFL différents, cette approche n'est pas consistante [Müller et Stiriba, 2007].

Pour s'affranchir de ce problème de consistance, ce dernier a proposé une méthode qui consiste à calculer des solutions intermédiaires entre ces mailles de niveaux différents. Cependant cette approche reste coûteuse en temps CPU. Si par exemple dans notre maillage, on ne respecte pas une certaine zone de transition et si le nombre de ces types de mailles y est conséquent. Dans notre approche, nous nous sommes inspiré des travaux d'Osher et de Sanders [Osher et Sanders, 1983]. Même si cette approche n'est pas consistante, elle donne une qualité assez comparable à celle de Müller et de Stiriba [Müller et Stiriba, 2007]. Le calcul des flux numériques de ces deux méthodes a été décrit dans [Mathis, 2010] sur ses études théorique et numérique des écoulements à transition de phase.

Connaissant l'évaluation de la solution de notre problème $\bar{U}(t_n)$ à l'instant t_n pour toutes les cellules ou interface, l'approche d'Osher et Sanders [Osher et Sanders, 1983] consiste à évaluer le flux dans une interface de niveau de CFL m à l'instant $t_n + 2^m \Delta t_n$ en faisant la mise à jour de $\bar{U}(t_n + 2^m \Delta t_n)$ la solution à l'instant $t_n + 2^m \Delta t_n$ avec $\bar{U}(t_n)$. Avec cette formulation, la solution à $t_{n+1}(t_n + 2^{\text{Level_max}} \Delta t_n)$ ne dépend que de la solution à t_n et aucune mise à jour n'est effectuée pendant les itérations sur les micro pas de temps. Cette mise à jour est fait au macro pas de temps. L'équation Eq.4.10 illustre bien cette approche de Müller et de Stiriba. Il faut entendre par 'micro pas de temps' et par 'macro pas de temps' le plus petit et le plus grand pas de temps dans le domaine de calcul, noté ici respectivement Δt_n et $2^{\text{Level_max}} \Delta t_n$.

4.2 Résolution numérique de la méthode

Examinons la méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle dans un code simplifié 1D.. On rappelle le problème de Cauchy (Eq.3.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = f(t, \bar{U}(t)), t \in I \\ \bar{U}(t_0) = \bar{U}^0 \end{cases} \quad (4.11)$$

où \bar{U} représente le vecteur des inconnues conservatives sur chaque cellule et $f(t, \bar{U})$ le flux numérique calculé à la frontière des cellules voisines.. En intégrant (Eq.4.11) sur un intervalle de temps $[t_n, t_n + 2^i \Delta t_n]$ avec i le niveau CFL de la cellule considérée et Δt_n le micro pas de temps, on obtient pour l'ordre 1 en précision:

$$\bar{U}(t_n + 2^j \Delta t_n) = \bar{U}(t_n) + 2^j \Delta t_n f(t_n, \bar{U}(t_n)), j=i, \text{Level_max} \quad (4.12)$$

Pour Adams-Bashforth d'ordre 2, on pose $t_{n+k}^j = t_n + 2^j k \Delta t_n$ et on a pour $j=i, \text{Level_max}$:

$$\bar{U}(t_{n+1}^j) = \bar{U}(t_n) + 2^j \Delta t_n \left[b_0(2^j \Delta t_n) F(t_n, \bar{U}(t_n)) + b_1(2^j \Delta t_n) F(t_{n-1}^j, \bar{U}(t_{n-1}^j)) \right] \quad (4.13)$$

Si on considère le micro pas de temps constant alors, on a:

$$b_0(2^j \Delta t_n) = -\frac{1}{2}, b_1(2^j \Delta t_n) = \frac{3}{2} \text{ d'où:}$$

$$\bar{U}(t_{n+1}^j) = \bar{U}(t_n) + 2^j \Delta t_n \left[\frac{1}{2} F(t_n, \bar{U}(t_n)) - \frac{3}{2} F(t_{n-1}^j, \bar{U}(t_{n-1}^j)) \right] \quad (4.14)$$

Pour la stabilité de la méthode, la condition de CFL (Eq.4.15) doit être respectée:

$$\frac{\Delta t(C_i)}{h(C_i)} \|\bar{u}_{\max}\| \leq 1 \quad (4.15)$$

Avec $\Delta t(C_i) = 2^{\text{Level}(C_i)} \Delta t_{\min}$ (Eq.4.8) et $h(C_i) = 2^{\text{Level}(C_i)} h_{\min}$ (Eq.4.5), cette condition est satisfaite pour $\frac{\Delta t_{\min}}{h_{\min}} \|\bar{u}_{\max}\| \leq 1$. Cette dernière représente la CFL pour la méthode d'Adams-Bashforth standard (Eq.4.9).

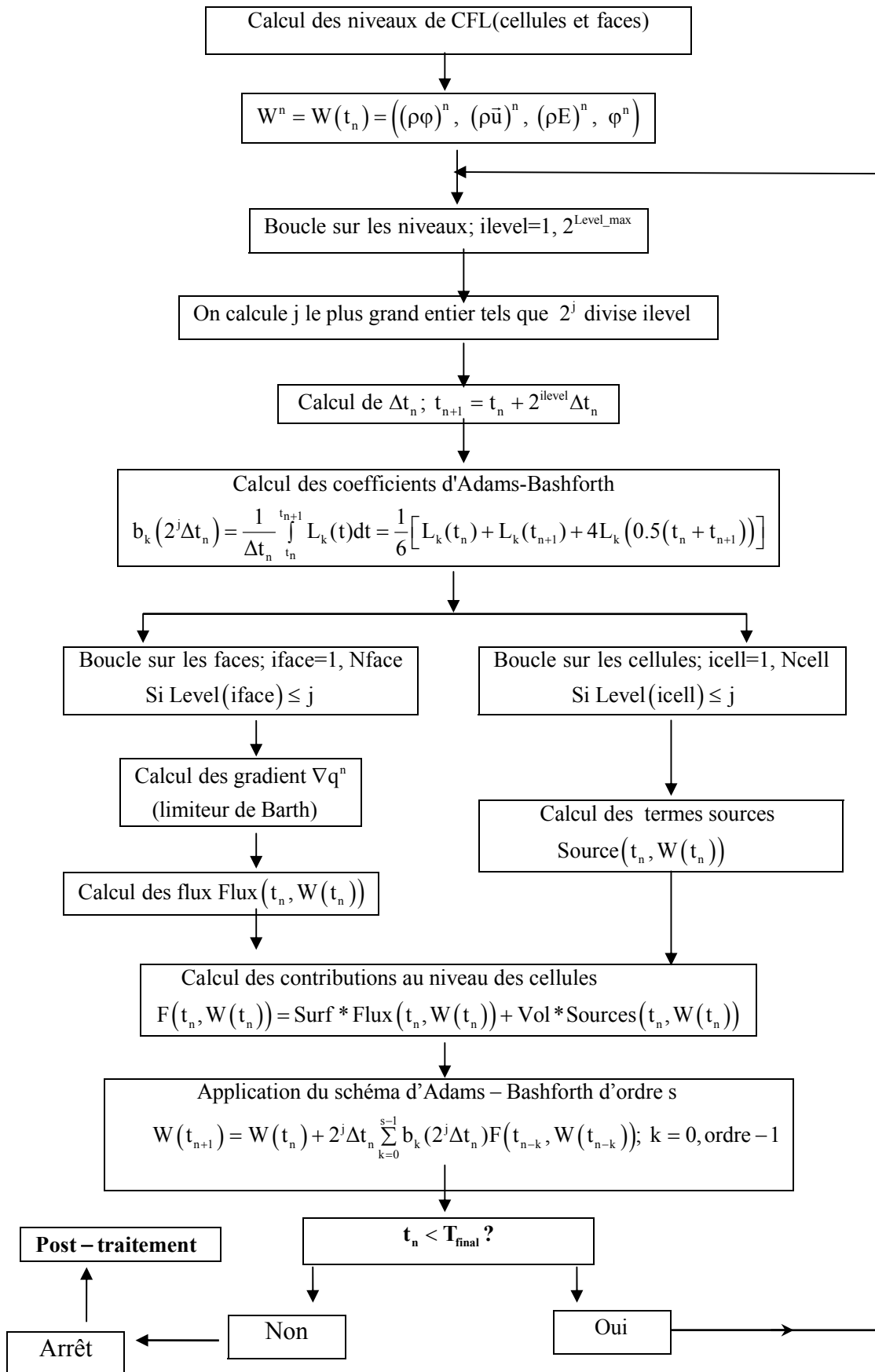
4.3 Algorithme de l'approche multi-échelle

L'idée de base est de pouvoir utiliser les méthodes d'Adams-Bashforth avec des critères géométriques liés au maillage. A partir des données initiales du maillage, on calcule le niveau de CFL pour chaque cellule et pour chaque face, ceci se fait avec les formules des équations Eq.4.1-7. Ce calcul permet de construire une structure hiérarchisée du maillage selon leur niveau de CFL. Les cellules et faces du maillage sont regroupées par paquet et le maillage initial est maintenant vu comme étant un ensemble de paquets. Ces derniers contiennent des cellules ou faces de même niveau de CFL. Par exemple pour le maillage (Fig.4.1), on a 3 paquets de niveau 0, 1 et 2 qui correspondent à trois niveaux de raffinement.

La résolution des équations se fait sur chacun des paquets ayant le même niveau de raffinement et une mise à jour est faite à chaque macro pas de temps. Cette mise à jour se fait avec l'équation Eq.4.9 pour le niveau de CFL maximal.

L'algorithme utilisé pour la méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle avec $\text{Level_max} + 1$ niveau de CFL est la suivante:

✓ **Algorithme pour la méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle**



4.4 Exemple avec trois cellules

Soit un maillage de 3 cellules C_1 , C_2 et C_3 de niveaux respectifs 0, 1 et 3 (Fig.4.2):



Fig.4.2: Approche multi-échelle: Maillage et niveaux de CFL

Si le pas de temps global calculé est Δt_n alors on a $\Delta t(C_i) = 2^{\text{level}(C_i)} \Delta t_n$. Les pas de temps pour les trois cellules sont: $\Delta t(C_1) = \Delta t_n$, $\Delta t(C_2) = 2\Delta t_n$ et $\Delta t(C_3) = 8\Delta t_n$. L'algorithme est le suivant:

```

Pour ilevel=1 à  $2^3$ 
  Pour icell=1, 3
    Si level(icell) <= idiv(ilevel)
      idiv(ilevel) est le plus grand entier tels que  $2^{\text{idiv(ilevel)}}$  divise ilevel
      On calcul les flux et on met à jour les variables calculées
      On met à jour les inconnues par la formule d'Adams-Bashforth d'ordre 1 ou 2
    Fin si
  Fin pour
Fin pour
  
```

Soit Test= «Si level(icell) <= idiv(ilevel) ».

Si le Test est vrai, on calcule les flux sinon on ne fait rien.

ilevel	1	2	3	4	5	6	7	8
idiv(ilevel)	0	1	0	2	0	1	0	3
Test pour C_1	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Test pour C_2	Non	Vrai	Non	Vrai	Non	Vrai	Non	Vrai
Test pour C_3	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Vrai

Tab.4.1: Approche multi-échelle: Test et Exemple

On calcule les flux:

- 8 fois pour la cellule C_1
- 4 fois pour la cellule C_2
- 1 fois pour la cellule C_3

On calcule 13 ($8+4+1$) fois les flux pour chaque macro pas de temps. Sans le multi-échelle, on calculerait 8 fois pour chaque cellule.

Ce qui correspond à un gain théorique de: $\text{Gain} = \frac{3 \cdot 8}{8+4+1} = 1.8$

5. Les techniques de compression d'interface

La simulation d'écoulements multi-fluides nécessite des méthodes numériques très robustes, capables de décrire des surfaces de discontinuité de certaines variables comme la masse volumique. En contrepartie de leur grande robustesse, ces schémas peuvent introduire des erreurs numériques dissipatives qui ont tendance à lisser les solutions obtenues notamment dans les zones de forts gradients et on parle de dissipation numérique (Fig.5.1).

Contrairement aux méthodes de reconstruction d'interface comme les méthodes VOF [Hirt et Nichols, 1981] ou les méthodes Level Set [Sethian, 1996] décrites au premier chapitre, les méthodes de capture décrivent aisément l'interface [Basset, 2006], mais au prix souvent de la génération d'une zone de mélange, non physique, due à une diffusion numérique de l'interface. Cette diffusion, importante en zone de forts gradients, peut être atténuée en augmentant l'ordre de la méthode, ou bien en ajoutant des techniques de raidissement d'interface. Les méthodes de raidissement d'interface ([Kacenias, 2008], [Aliabadi et Tezduyar, 2000], [Olsson et Kreiss, 2005], [Kokh, 2001], [Kokh et Allaire, 2007], [Strubelj *et al.*, 2009], [Cassidy *et al.*, 2009] et [Strubelj et Tiselj, 2011]) initialement proposées par Harten [Harten *et al.*, 1977] consistent à réduire la diffusion de l'interface en se basant sur le principe de conservation de la masse.

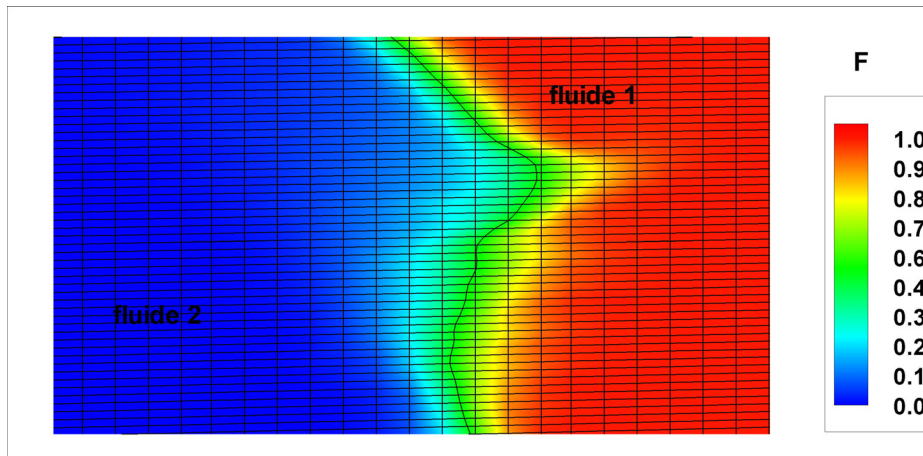


Fig.5.1: Compression d'interface: Interface avec diffusion numérique

Les méthodes de raidissement d'interface utilisent un transport artificiel qui tend à forcer les valeurs de la fraction volumique en des valeurs extrêmes, c'est-à-dire 0 ou 1 pour diminuer la diffusion numérique de l'interface liée à la résolution de l'équation de transport. Ce terme n'a aucune influence sur les milieux homogènes eau ou air, mais pénalise la zone de mélange. Dans l'approche volumes finis, cela revient à ajouter un terme de flux.

Nous nous concentrons dans ce chapitre sur le problème spécifique de la diffusion numérique près des discontinuités de contact pour l'équation de convection (Eq.2.4) qui modélise l'évolution de cette interface. Nous présentons des méthodes de compression d'interface qui permettent d'augmenter la précision de l'interface. Comme nous le verrons, les principaux avantages de ces méthodes de compression d'interface est qu'elles conservent la masse correctement et qu'elles sont faciles à mettre en œuvre pour des problèmes à deux ou trois dimensions.

5.1 La méthode de Kaceniauskas

Les méthodes de raidissement d'interface explicites sont beaucoup plus faciles à utiliser que les méthodes implicites. On peut citer celle de Kaceniauskas [Kaceniauskas, 2008]. Avec cette méthode où la nouvelle valeur corrigée de la fonction de couleur ϕ solution de l'équation (Eq.2.4) dépend de deux coefficients calculés à partir de la conservation du débit. Pour mieux corriger les valeurs incorrectes de ϕ et diminuer la perte de précision au niveau de l'interface, Kaceniauskas introduit une fonction de correction. Elle est choisie afin de reconstruire et de maintenir la netteté de l'interface. Cette technique fonctionne et est similaire à celle proposée par Aliabadi et Tezduyar [Aliabadi et Tezduyar, 2000]. Les valeurs de ϕ sont ajustées par la formule suivante:

$$\phi = c^{1-\alpha} \phi^\alpha, \quad 0 \leq \phi \leq c \quad (5.1)$$

$$\phi = 1 - (1 - c)^{1-\alpha} (1 - \phi)^\alpha, \quad c \leq \phi \leq 1 \quad (5.2)$$

où le paramètre c représente le niveau de conservation de masse, tandis que α gouverne la netteté de l'interface en mouvement. Les tests numériques effectués montrent une bonne convergence de la méthode. L'étude détaillée de convergence et de la procédure de mise en œuvre pour calculer les variables α et c ne sont pas présentés dans ce texte. Cependant, pour la modélisation de vagues déferlantes et pour d'autres phénomènes extrêmes, c varie dans une gamme relativement large de 0.2 à 0.8 [Kaceniauskas, 2008].

5.2 La méthode de Olsson

Une perspective d'optimisation du transport d'interface est envisageable lorsque l'on considère un couplage entre l'équation de transport (Eq.2.4) et un algorithme de réinitialisation. Cette technique implicite, similaire à celle proposée dans [Coupez *et al.*, 2006] et décrite dans [Basset, 2006], part de l'observation que la vitesse de l'écoulement autour de l'interface est importante.

La méthode d'Olsson et de Kreiss [Olsson et Kreiss, 2005] est un outil puissant pour représenter des interfaces dans le cas bi-fluide. Son principal avantage est sa simplicité et la possibilité d'obtenir un ordre de précision élevé en utilisant des techniques standards pour les équations aux dérivées partielles.

Dans un premier temps, le système (Eq.2.4) est résolu numériquement. Deuxièmement, nous résolvons une équation d'initialisation après chaque pas de temps. Comme proposé initialement par Harten [Harten, 1977], il est possible d'ajouter une compression artificielle afin de maintenir la résolution des discontinuités de contact. Cela peut être considéré comme une étape intermédiaire où on résout une loi de conservation de type:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \text{div}(F(\phi)) = 0 \quad (5.3)$$

Où $F(\phi)$ correspond au flux de compression. Pour que le flux de compression artificielle agisse dans les régions où $0 \leq \phi \leq 1$ et dans la direction normale de l'interface, $F(\phi)$ est choisie de la manière suivante:

$$F(\phi) = \phi(1 - \phi) \bar{n} \quad (5.4)$$

où $\vec{n} = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|}$ est la normale de l'interface. On note par τ le temps artificiel.

L'équation (Eq.5.3) est une équation différentielle hyperbolique. Comme τ augmente, les chocs stationnaires se développeront à l'interface. Pour éviter ces discontinuités à l'interface, une petite quantité de viscosité est ajoutée, c'est à dire, nous modifions la conservation par la loi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \text{div}(F(\varphi)) = \varepsilon \Delta \varphi \quad (5.5)$$

Ou dans sa forme conservative:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \text{div}(F(\varphi) - \varepsilon \nabla \varphi) = 0 \quad (5.6)$$

\vec{n} est calculé uniquement une fois pour chaque étape intermédiaire. Après chaque étape d'advection, \vec{n} est maintenu fixe jusqu'à ce que l'état d'équilibre soit atteint. Si nous utilisons une méthode explicite en pseudo temps, nous obtenons des restrictions au niveau de la stabilité (équivalent de la condition de CFL):

$$\Delta \tau \leq C \frac{h^2}{\varepsilon} \quad (5.7)$$

Expérimentalement, la stabilité est obtenue en choisissant $C = 0.25$. ε détermine l'épaisseur d'interface et est de la forme suivante:

$$\varepsilon = \frac{h^{1-d}}{2} \quad (5.8)$$

Si $d=0$ alors ε représente la largeur de l'interface et est proportionnelle à h . Dans ce cas, la résolution de cette équation augmentera efficacement le profil de l'interface [Olsson et Kreiss, 2005].

5.3 La méthode de Kokh

Afin d'analyser l'origine de cette diffusion numérique propre à la discrétisation des équations de transport et pour mieux améliorer la résolution de la surface libre, d'autres méthodes de compression ont été développées dans [Kokh, 2001].

Pour cela, il propose un procédé simple qui consiste à ajouter un terme source non-linéaire à l'équation de transport. Nous supposons de nouveau le cas du transport d'une fonction en créneau φ qui prend initialement les valeurs 0 ou 1. Deux types de termes sources sont envisagés. En premier lieu, considérant le paramètre réel $\eta > 0$, un terme source « raide » est introduit et on obtient:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi = \eta \varphi (1 - \varphi) \left(\varphi - \frac{1}{2} \right) \quad (5.9)$$

Notons que pour la solution du problème continue pour une donnée initiale: $\varphi = 1$ dans l'eau et $\varphi = 0$ dans l'air, le terme source disparaît et donc l'équation ci-dessus se réduit bien à l'équation de transport (Eq.2.4). La modification du schéma d'advection classique se fait alors par le simple ajout d'un terme source. Cependant dans sa thèse, les résultats numériques effectués ont montré que cette méthode change le profil de la surface libre et que les autres grandeurs physiques comme la vitesse, densité et la pression restent inchangées [Kokh, 2001].

Une autre méthode a été aussi validée dans [Kokh, 2001] et cette fois ci on rajoute un flux de compression d'interface comme dans la méthode d'Olsson et de Kreiss [Olsson et Kreiss, 2005]. L'inspiration vient du fait qu'il faut ajouter un terme de viscosité dans l'équation de convection. On obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi + \text{div} \left(\frac{1}{4} \eta \varphi^2 (1 - \varphi)^2 \vec{n} \right) = 0 \quad (5.10)$$

Où $\vec{n} = (1, 1, 1)^T$

Il s'agit en fait d'un cas particulier d'une méthode de raidissement développée par Harten [Harten, 1977] appelée « Artificial Compression ». Encore une fois, pour la donnée initiale de type crâneau, cette équation se réduit à l'équation de transport initiale. Les modifications à apporter au code sont immédiates: elles consistent à ajouter le terme source ou le flux de compression à l'équation d'advection de la fonction couleur. Cette méthode peut être aussi considérée comme étant une étape intermédiaire en résolvant à chaque pas de temps, en résolvant le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(\tau)}{\partial \tau} + \text{div} \left(\frac{1}{4} \eta \phi(\tau)^2 (1 - \phi(\tau))^2 \vec{n} \right) = 0, \tau \in I \\ \phi(\tau_0) = \varphi(t_n) \end{cases} \quad (5.11)$$

τ est le temps fictif.

5.4 Choix d'une méthode de compression

Sur la base de notre étude bibliographique, les quatre méthodes ont été implémentées dans le code de calcul. Les trois premiers, celles de Kaceniasukas, d'Olsson et de Kokh avec terme source, présentent des instabilités lors des premières analyses et validations dans les configurations 2D et 3D.

Dans [Kaceniasukas, 2008], un système de Navier-Stokes incompressible est utilisé, la densité des fluides (eau, air) dépend linéairement de la fraction volumique et n'obéit pas à une équation de conservation. Cette technique de compression semble inadaptée à notre modèle d'Euler compressible. Des variations de densité importantes ont été observées au niveau de l'eau.

La deuxième méthode, celle d'Olsson et de Kreiss donne de bons résultats en 1D dans nos travaux de validation, elle permet de réduire l'interface comme dans [Olsson et Kreiss, 2005]. Elle a été testée dans le cas d'un tube à choc. L'origine de ces instabilités pour le cas 2D et 3D n'est pas encore mise en lumière dans nos travaux et pourra faire l'objet d'investigations ultérieurement. Dans [Olsson et Kreiss, 2005] et dans [Štrubelj *et al.*, 2009], on note une performance de cette méthode, notons que ces auteurs utilisent cette technique de compression couplée avec une méthode de suivie d'interface de type Level Set.

L'utilisation de la méthode de compression de Kokh avec le rajout d'un terme flux a été privilégiée. Elle a une bonne stabilité (paragraphe suivant) et sa formulation conservative permet son implémentation facile.

Cette méthode, comme celle avec un terme source, a été validée dans [Kokh, 2001] et les résultats numériques ont montré sa pertinence pour évaluer la surface libre. Cependant l'effet du raidissement reste sensible pour modifier significativement les valeurs comme la pression, la vitesse de l'écoulement et les densités des fluides. Ces grandeurs physiques sont inchangées, voir ([Kokh, 2001], pages 163-170 et 229).

La formulation non conservative de l'équation de convection sur la fraction volumique couplée avec cette approche est optée dans cette thèse. Elle permet, dans notre cas, d'avoir de meilleurs résultats sur toutes ces grandeurs telles que la pression, la vitesse, l'élévation de la

surface libre. Des comparaisons illustratives avec des données expérimentales seront faites dans les deux derniers chapitres.

5.5 Résolution numérique de la méthode de Kokh

On étudie la stabilité de la méthode de compression d'interface [Kokh, 2001]. Considérons le modèle de loi de conservation suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{1}{4} \eta \phi(t)^2 (1 - \phi(t))^2 \bar{n} \right) = 0, t \geq 0 \\ \phi(t_0) = \phi^0 \end{cases} \quad (5.12)$$

ϕ représente la fraction volumique corrigée, $\bar{n} = (1, 1, 1)^T$ et t le temps. Cette formulation permet de mettre en évidence la stabilité du problème. Ce système peut s'écrire sous sa forme matricielle par:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A(\phi) \cdot \text{grad}(\phi) = 0 \quad (5.13)$$

$A(\phi)$ est la matrice jacobienne associée et est égale à:

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{4} \eta \phi^2 (1 - \phi)^2 \bar{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{4} \eta \phi^2 (1 - \phi)^2 \right) \bar{n} \quad (5.14)$$

$$A(\phi) = \left(\eta \phi (\phi - 1) \left(\phi - \frac{1}{2} \right) \right) \bar{n} \quad (5.15)$$

Si nous utilisons une méthode explicite en temps avec un pas de temps $\Delta \tau$ et un pas d'espace Δx , nous obtenons la condition de stabilité pour le schéma pour l'ordre 1 (Eq.5.13) de la forme:

$$\lambda_{\text{MAX}} \frac{\Delta \tau}{\Delta x} \leq 1 \text{ avec } \lambda_{\text{MAX}} = \text{Max}_{\phi} (\|A(\phi)\|) \quad (5.16)$$

$\|A(\phi)\|$ représente la norme de la matrice $A(\phi)$. La dérive de $A(\phi)$ par rapport à ϕ est:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (A(\phi)) = \eta \left(3\phi^2 - 3\phi + \frac{1}{2} \right) \bar{n} \quad (5.17)$$

Cette dérivée admet deux asymptotes $\tilde{\phi}_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ et $\tilde{\phi}_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, l'asymptote $\tilde{\phi}_2 > 1$ est exclue puisque la fraction volumique est bornée entre 0 et 1 et on a:

$$\lambda_{\text{MAX}} = \text{Max}_{\phi} (\|A(\phi)\|) = \|A(\tilde{\phi}_1)\| = \sqrt{3} \eta \left\| \tilde{\phi}_1 (\tilde{\phi}_1 - 1) \left(\tilde{\phi}_1 - \frac{1}{2} \right) \right\| = 0.083 \eta \quad (5.18)$$

Cette condition de stabilité devient alors:

$$(0.083\eta) \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.19)$$

On définit alors le pseudo pas de temps par la formule:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{0.083\eta} \quad (5.20)$$

Avec la méthodologie de couplage adoptée pour la résolution, le pas de temps du système global devient:

$$\Delta t_{\text{couplage}} = \text{Min}(\Delta t, \Delta\tau) \quad (5.21)$$

Δt est le pas de temps utilisé pour résoudre le problème de Riemann sans la compression. Pour des valeurs de η petit (elles sont souvent plus petites que 1), la quantité 0.083η devient faible par rapport à la vitesse maximale de l'écoulement et de la vitesse du son artificielle. $\Delta\tau$ devient alors très grand par rapport à Δt . Cette condition est donc assurée pour la plus part du temps si on choisit $\Delta\tau = \Delta t$. Afin de résoudre le système (Eq.5.12) pour la correction de la fraction volumique, notre approximation est basée sur la résolution de l'équation par la méthode des volumes finis. Si Δx est le pas d'espace avec $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta\tau$ est le pas de temps avec $\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n$ et si ϕ_i^n est l'approximation de $\phi_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi(t_n, x) dx$, alors on obtient l'équation discrétisée supplémentaire pour la compression de l'interface:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \left(G_{i+\frac{1}{2}}(\phi_i^n) - G_{i-\frac{1}{2}}(\phi_i^n) \right) \quad (5.22)$$

$G_{i+\frac{1}{2}}(\phi_i^n)$ est le flux numérique associé et est égale à:

$$G_{i+\frac{1}{2}}(\phi_i^n) = \frac{1}{8} \eta \left(\max(1 - \phi_{i+1}^n, 0)^2 \max(\phi_{i+1}^n, 0)^2 + \max(1 - \phi_i^n, 0)^2 \max(\phi_i^n, 0)^2 \right) \quad (5.23)$$

Soulignons que ce flux a été approximé avec les méthodes de Rusanov et de Godunov. Cependant son calcul avec ce schéma centré fournit des résultats meilleurs. Le choix de cette méthode est aussi avantageux de par sa simplicité.

5.6 Algorithme et programmation de la méthode

Au niveau de la programmation dans le code, cette méthode a été implémentée par rajout du flux de compression $\text{div} \left(\frac{1}{4} \eta \phi(t)^2 (1 - \phi(t))^2 \bar{n} \right)$. Deux systèmes de codage ont été testés. Le premier consiste à faire une étape de réinitialisation (Eq.5.11) avec l'approximation précédemment décrite (Eq.5.23), on y fait des itérations sur des pseudos pas de temps. Pour le deuxième, un couplage direct avec l'équation de convection (Eq.5.10) est fait, cela permet de réduire les couts de calcul. Contrairement à la méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle où une restructuration du code était nécessaire pour pouvoir l'intégrer, celle de Kokh nécessite juste une modification du flux numérique de l'équation de convection.

Par exemple en 1D le schéma numérique non conservatif pour l'équation de convection (Eq.2.4) s'écrit en un point $x_{i+1/2}$ au temps t_{n+1} [Golay et Helluy, 2007a]:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} L(\varphi_i^n) \quad (5.24)$$

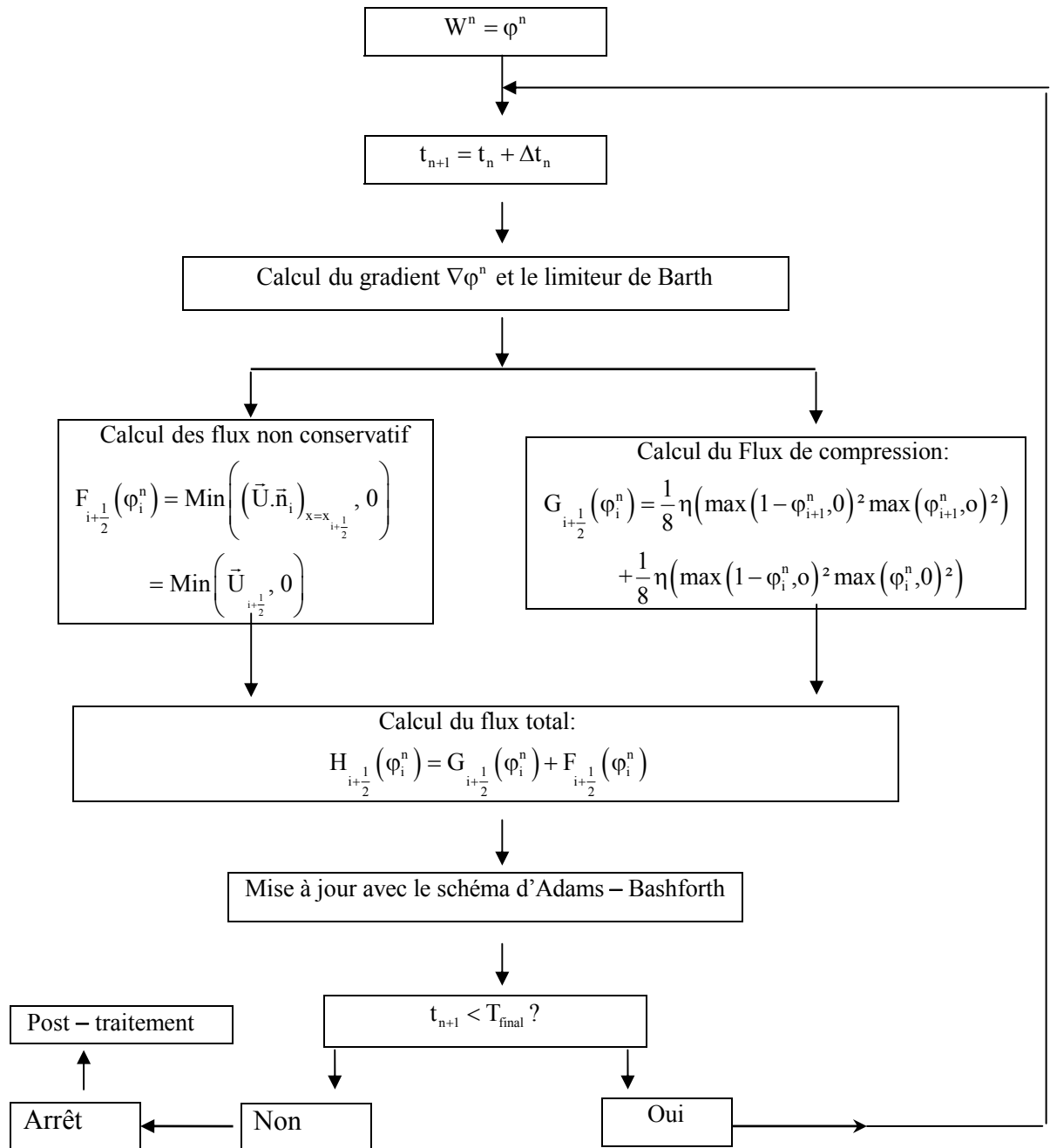
$$L(\varphi_i^n) = \min\left(u_{i+\frac{1}{2}}^n, 0\right)(\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) + \max\left(u_{i-\frac{1}{2}}^n, 0\right)(\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n) \quad (5.25)$$

La modification du flux peut se faire directement, dans le cas du couplage de l'équation d'initialisation et de convection et on a:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} L(\varphi_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G_{i+\frac{1}{2}}(\varphi_i^n) - G_{i-\frac{1}{2}}(\varphi_i^n) \right) \quad (5.26)$$

L'algorithme utilisé pour cette méthode de compression avec ce couplage est la suivante:

✓ **Algorithme pour la méthode de Kokh**



Partie 3

Validation de la modélisation et applications au déferlement de vague 3D avec macro-rugosités et d'une rupture de barrage 3D avec obstacle

Table des matières

6.	VALIDATION	93
6.1	Validation de la méthode d'Adams-Bashforth par le tube à choc.....	93
6.2	Validation de la méthode multi-échelle	96
6.3	Validation de la méthode de raidissement d'interface	104
6.4	Conclusion.....	112
7.	QUELQUES APPLICATIONS	113
7.1	Propagation et déferlement 2D d'une vague sur une plage.....	113
7.2	Propagation et déferlement 2D d'une vague avec macro-rugosités	120
7.3	Analyses numériques d'un déferlement 3D de vague en zone côtière	137
7.4	Rupture de barrage 3D en présence d'obstacle.....	149

6. Validation

Rappelons que le code a été déjà validé et comparé à un certain nombre de méthodes numériques dans le cadre d'un benchmark [Helluy *et al.*, 2005] dans le cas du déferlement de vague 2D. Le but ici est de valider les deux méthodes principales développées tout au long de cette thèse. Il s'agit de la méthode d'Adams-Bashforth avec l'approche multi-pas et de la méthode de compression 'interface. On considérera deux cas de validation. Le premier est le problème du tube à choc où différents raffinement de maillage sont effectués. Le deuxième cas est la propagation bidimensionnelle d'une vague solitaire. Notons que la condition CFL est fixée à 0,9 pour toutes les simulations réalisées.

6.1 Validation de la méthode d'Adams-Bashforth par le tube à choc

Nous évaluons dans cette partie, la méthode d'Adams-Bashforth sans l'approche multi-échelle par rapport à la méthode d'Euler.. On notera ρ , u et p les valeurs numériques de la masse volumique du fluide, de la vitesse suivant x et de la pression, ρ_{ex} , u_{ex} et p_{ex} seront leurs valeurs exactes. Pour alléger les écritures, AB2 et E2 représenteront respectivement la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2 et Euler d'ordre 2, AB1 et E1 pour l'ordre de précision 1. L'erreur relative de la méthode d'Adams-Bashforth par rapport à la méthode d'Euler sera notée $erreur(AB/E)$.

On considère le problème du tube à choc dans un domaine $x \in [-1;1]$. Ce cas test fait intervenir un choc se propageant tout au long du tube et permet de voir la stabilité du schéma numérique. Le modèle utilisé est le modèle d'Euler (Eq.2.5) avec la loi de pression isotherme (Eq.2.14). Le tube est initialement rempli d'un fluide de densité 1000kg/m^3 et de vitesse nulle. A gauche on impose une pression de 10^5Pa et à droite une pression de $1.0001 \cdot 10^5\text{Pa}$ (Tab.6.1). Puis on laisse le système évoluer sur 0.5 seconde. On utilise trois maillages uniformes M1, M2 et M3 de nombre de cellules respectif 200, 400 et 1000 suivant x et 1 maille suivant y et z .

variable	Etat droit $x > 0.5$	Etat gauche $x < 0.5$
Vitesse	$u_d = 0$ $v_d = w_d = 0$	$u_g = 0$ $v_g = w_g = 0$
densité	$\rho_d = 1000$	$\rho_g = 1000$
pression	$p_d = 10^5$	$p_g = 1.0001 \cdot 10^5$
Loi de pression	$\pi_d = -0,9996 \cdot 10^5$	$\pi_g = -0,9996 \cdot 10^5$
	$\gamma_A = 1.1$	$\gamma_w = 1.1$

Tab.6.1: Tube à choc: Conditions aux limites

Les résultats obtenus avec E2 et ceux obtenus avec AB2 pour un temps de simulation de 0.5s sont comparés. Tous les résultats sont présentés à cet instant. La solution exacte pour ce problème est celle trouvée théoriquement et sera représentée en courbe verte. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes de la vitesse, de la densité et de la pression. Pour une meilleure quantification, l'erreur en norme L2 est aussi représentée.

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain
E2	0.344	0.0107	48.8	9.72	1.79
AB2	0.192	0.0102	46.4	9.71	
Erreur(AB2/E2)		-4.74%	-4.91%	-0.06%	

Tab.6.2: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M1

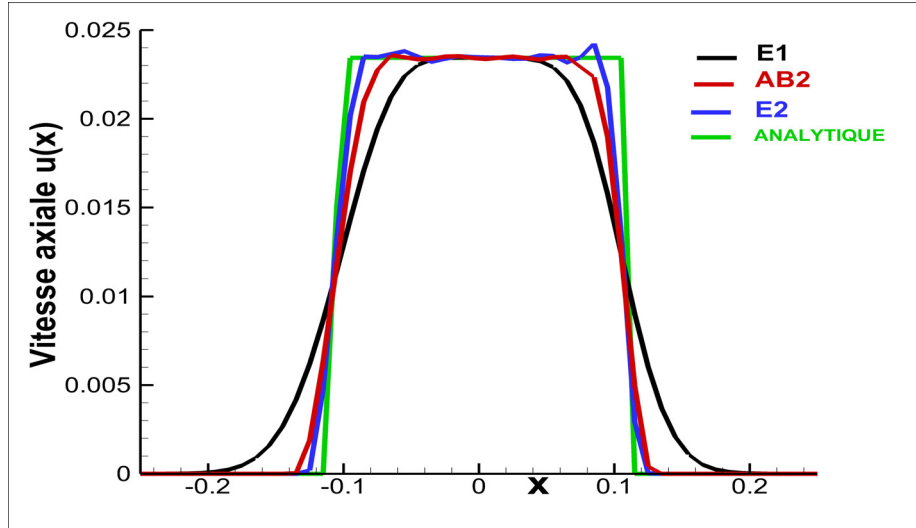


Fig.6.1: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M1

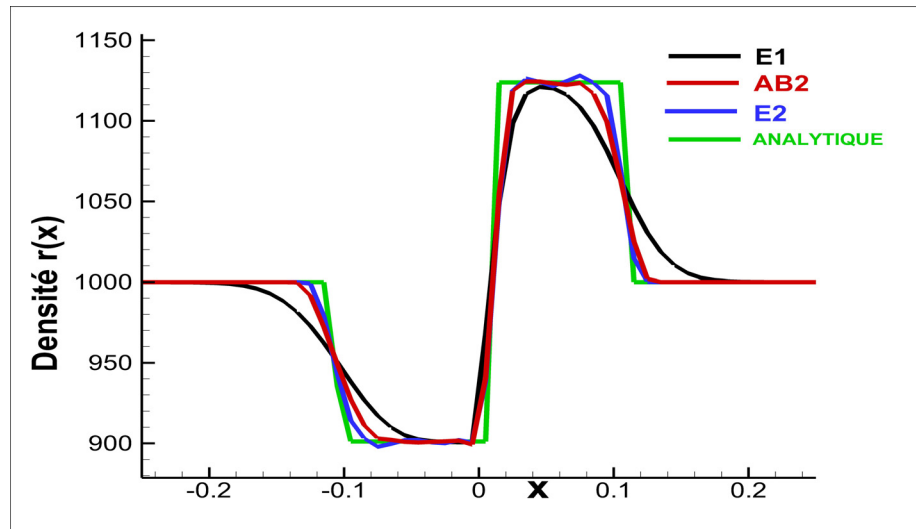


Fig.6.2: Tube à choc: Densité, maillage M1

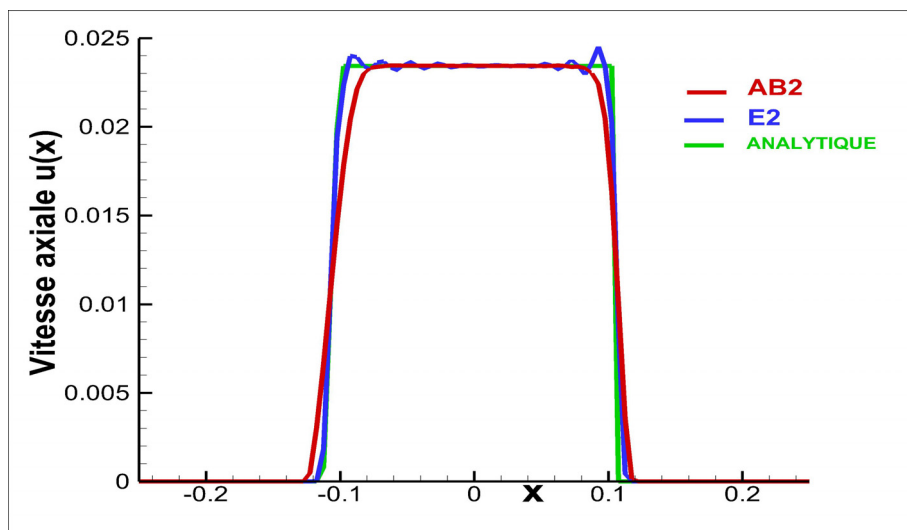


Fig.6.3: Champs de vitesse axiale, maillage M2

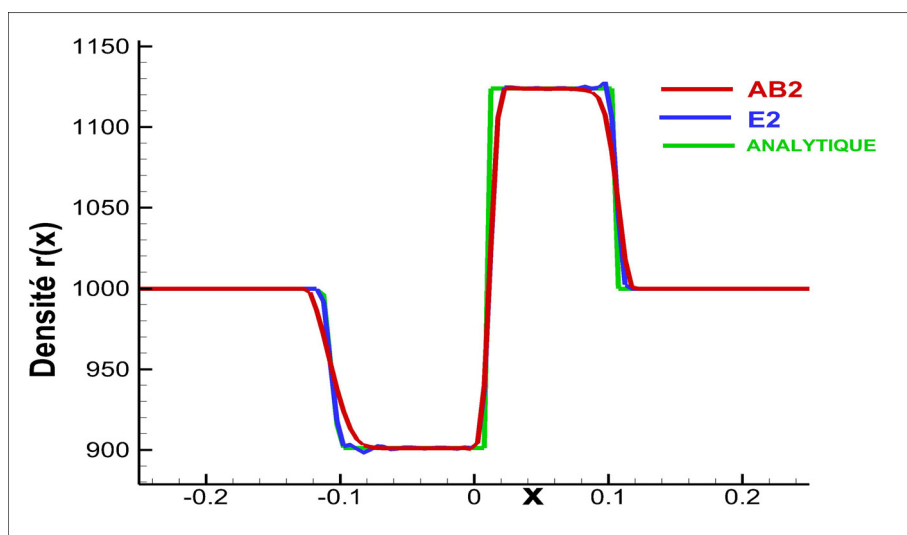


Fig.6.4: Tube à choc: Densité, maillage M2

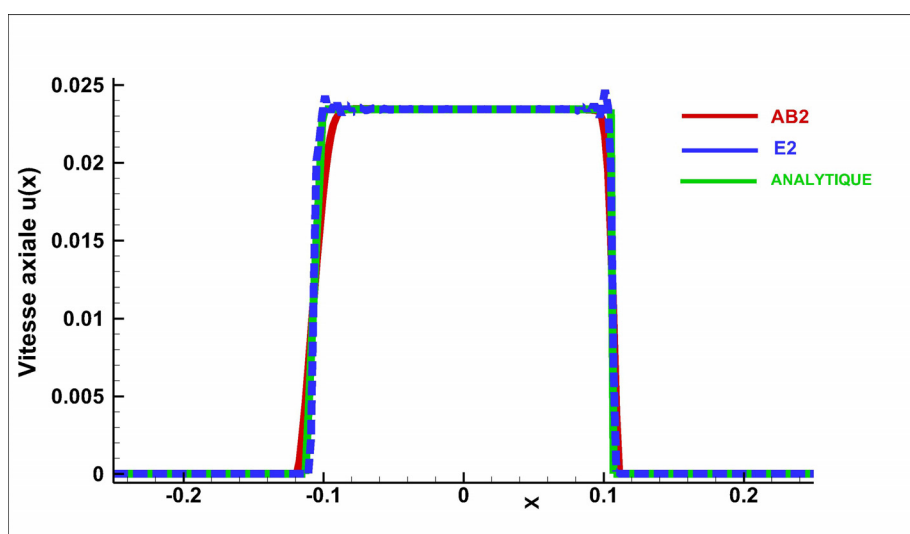


Fig.6.5: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M3

Les deux méthodes donnent les mêmes résultats pour l'ordre 1, les méthodes AB1 et E1 sont identiques ((Eq.3.5) et (Eq.3.23) pour $s=1$). Comme attendu, on voit que les erreurs sont moindres avec l'ordre de précision 2 (Fig.6.1) mais encore existantes aux voisinages des discontinuités de chocs. La méthode AB2 est beaucoup plus stable ici que E2 (Fig.6.1, Fig.6.3 et Fig.6.5) et légèrement plus précise aux niveaux des discontinuités de choc. Elle est beaucoup plus rapide, on a un gain de 1.80 sur le temps CPU. Ceci s'explique par le fait que pour la méthode E2, on calcule une solution intermédiaire (Eq.3.7-8) pour augmenter notre précision, alors que pour la méthode AB2, il suffit de stocker les flux (Eq.3.27) et les pas de temps d'avant.

On note globalement un bon accord entre les deux méthodes en précision et une nette différence en termes de temps CPU. AB2 a tendance à lisser la solution au niveau des chocs, cela est dû à la diffusion numérique du schéma, cependant comme la méthode de Heun (Eq.3.10-11), on peut disposer d'une méthode de prédictor-correcteur de type Adams appelée méthode Adams Bashforth Moulton. Il s'agit d'utiliser la méthode AB2 comme prédictor et celle d'Adams-Moulton comme correcteur. Elle est populaire et couramment utilisée parce qu'elle est simple à mettre en œuvre et est fortement stable [Burden et Faires., 1993]. On obtiendra une méthode d'ordre 2 qui sera plus précise [Allahviranloo *et al.*, 2007], par contre on perdra en temps CPU.

Ces résultats obtenus, à ce stade, permettent de conclure sur la validation de la méthode Adams-Bashforth. Il apparaît clairement que les deux méthodes AB2 et E2 calculent correctement les quantités physiques de l'écoulement comme la vitesse, la densité et la pression et donnent des résultats similaires. Avec AB2, on gagne en temps de calcul et une diffusion non importante est notée au niveau des chocs. AB2 constituera notre schéma d'intégration en temps de choix pour les futures simulations.

6.2 Validation de la méthode multi-échelle

6.2.1 Cas du tube à choc

La méthode d'Adams-Bashforth avec l'approche multi-échelle est ici évaluée. Le système évolue sur 0.5 seconde. Un ensemble de trois simulations numériques a été utilisé pour la validation de la méthode. Comme précédemment, on allégera les notations pour nos comparaisons. ABM1 et ABM2 représentent Adams-Bashforth multi-échelle d'ordre 1 et d'ordre 2. Les résultats obtenus avec ces différents maillages avec les quatre différentes méthodes AB1, AB2, ABM1 et ABM2 sont présentés. L'objectif de cette partie est de valider l'approche multi échelle qui devrait permettre de réaliser des simulations en moindre coût en temps de calcul et de conserver la précision par rapport à la méthode standard.

6.2.1.1 Description des différents types de maillages

Un raffinement de maillage avec différents niveaux de CFL est nécessaire pour évaluer la précision de la méthode d'Adams-Bashforth multi-échelle. Pour la rapidité et la performance de la méthode, différents maillages ont été générés. Ces derniers sont grossiers et comportent 200 cellules. Pour tous ces maillages, un raffinement est fait au niveau des discontinuités de contact aux alentours du point $x=0$. En ce point on a une différence de pression qui nécessite des tailles de mailles petites en cette zone. Vu que la théorie y prévoit des instabilités à cause de la présence du choc, cela nous permettrait d'analyser la stabilité du schéma.

Les trois maillages, notés M4, M6 et M7, utilisés pour les simulations ont des niveaux de raffinement différents. Le raffinement s'effectue suivant l'axe x , on dispose d'une maille suivant y et z . Leurs niveaux de CFL varient de 1 à 6 et cela permettra d'étudier la robustesse de la méthode. Ces niveaux de CFL sont calculés une seule fois au démarrage du calcul

puisqu'ils ne dépendent que des données géométriques. On représente les caractéristiques des maillages sous formes de tableaux. À cause de la symétrie du domaine, seule la moitié de la géométrie du problème est présentée:

Maillage 4	$x \in [-1; -0.125]$	$x \in [-0.125; 0]$
Nb mailles	75	25
Level	1	0

Tab.6.3: Tube à choc: Définition du maillage M4

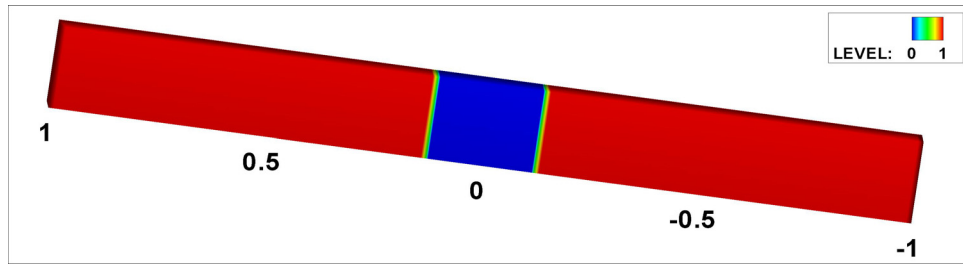


Fig.6.6: Tube à choc: Niveaux de CFL, maillage M4

Maillage 6	$x \in [-1; -0.125]$	$x \in [-0.125; 0.625]$	$x \in [0.625; 0]$
Nb mailles	60	24	16
Level	3	2	0

Tab.6.4: Tube à choc: Définition du maillage M6

Maillage 7	$x \in [-1; -10^{-3}]$	$x \in [-10^{-3}; 0]$
Nb mailles	90	10
Level	6	0

Tab.6.5: Tube à choc: Définition du maillage M7

Dans le maillage M4, le diamètre minimal est de $9,1 \cdot 10^{-4}$ m et le diamètre maximal de $2,2 \cdot 10^{-3}$ m (un rapport de 2.3), ce qui donne un niveau CFL maximal de 1. Toujours pour M4, en considérant l'autre moitié du domaine, 50 cellules ont un niveau CFL de 0 et 150 cellules ont un niveau CFL de 1 (Tab.6.3). Ce premier maillage avec un niveau de raffinement permet une première approche de validation de notre schéma numérique.

On augmente le niveau de raffinement de maillage avec M6 de 3. Ces deux maillages sont intéressants pour notre validation dans la mesure où les tailles des mailles de représentent pas une grande disparité. Pour exemple pour M6, le diamètre maximal est 8 fois plus grand que le diamètre minimal. Les temps de calcul des approches avec et sans multi-échelle seront évalués pour chaque type de maillages.

Pour s'assurer de la stabilité de l'approche multi-échelle du point de vue numérique, le maillage M7 représente un bon candidat. Il présente une très grande disparité des tailles des cellules, les plus petites mailles se trouvent toujours au niveau des discontinuités de contact.

On a un rapport de 64 entre les diamètres de la plus petite cellule et de la plus grande pour ce maillage. On n'impose pas un facteur de transition pour les cellules des maillages. M7 présente un autre intérêt lié au calcul du gain en temps de calcul. Avec 8 cellules très petites dans le maillage, il permet de calibrer les temps perdus au niveau des stockages des flux et au niveau des tests effectués pour leurs calculs.

6.2.1.2 Resultats

Dans cette partie, les résultats obtenus avec les méthodes AB1, AB2, ABM1 et ABM2 pour un temps de simulation de 0.5s sont présentés. La solution théorique toujours représentée en courbe verte est utilisée pour la validation. On présente les résultats des simulations avec les six maillages avec la vitesse, la densité et la pression. Comme précédemment avec la validation de la méthode AB2. Les erreurs en norme L2 de la vitesse, de la densité et de la pression sont représentés sous forme de tableaux ainsi que les temps de calcul fournis par les méthodes AB2 et AB2M. Pour calibrer les gains en temps CPU, il est nécessaire de calculer aussi les gains trouvés théoriquement. On peut estimer le gain théorique en fonction du nombre de mailles et des niveaux de CFL par la formule:

$$\text{Gain théorique} = \frac{\sum_i^N \text{nbcell}(i) * 2^N}{\sum_i^N \text{nbcell}(i) * 2^{N-i}} \quad (6.1)$$

Où nbcell(i) est le nombre de cellule de niveau i.

Par exemple, pour le maillage M6 avec 32 cellules de niveau 0, 48 de niveau 2 et 120 de niveau 3, le gain théorique est de:

$$\text{Gain} = \frac{\sum_i^N \text{nbcell}(i) * 2^N}{\sum_i^N \text{nbcell}(i) * 2^{N-i}} = \frac{(32+48+120)*2^3}{32*2^3+48*2^1+120*2^0} = 3.4 \quad (6.2)$$

Les résultats obtenus avec les trois cas sont présentés dans les figures suivantes. Pour le premier maillage, on compare les méthodes du premier ordre AB1 et AB1M avec les données théoriques (Fig.6.7). Les résultats obtenus sur un maillage uniforme de même nombre de mailles sont aussi présentés (Fig.6.7). Les résultats avec l'extension d'ordre 2 en précision est ensuite illustrés (Fig.6.8). Pour les autres figures, des comparaisons avec l'ordre 2 sont présentées (Fig.6.9 et Fig.6.10).

Les tableaux (Tab.6.6 à Tab.6.10) montrent les comparaisons des méthodes avec et sans l'approche multi-échelle en temps de calcul et erreurs de calcul sur les grandeurs physiques.

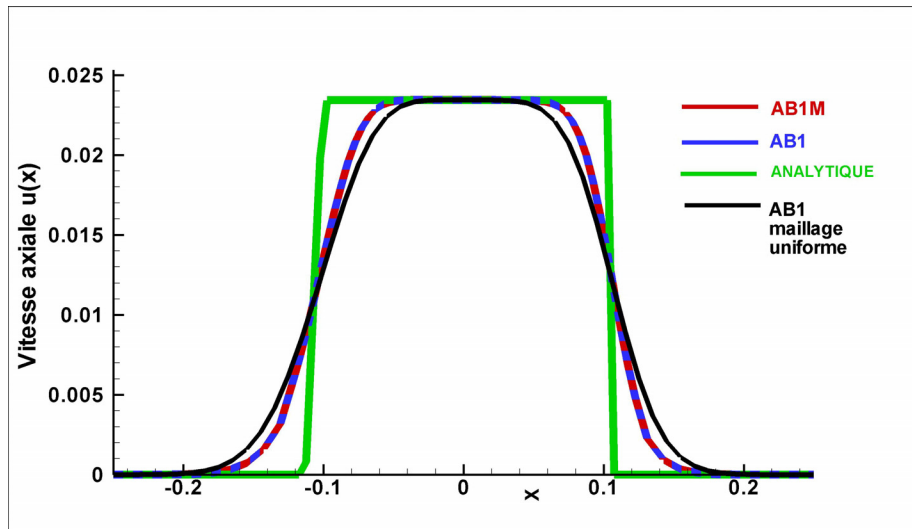


Fig.6.7: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M4, niveau=1

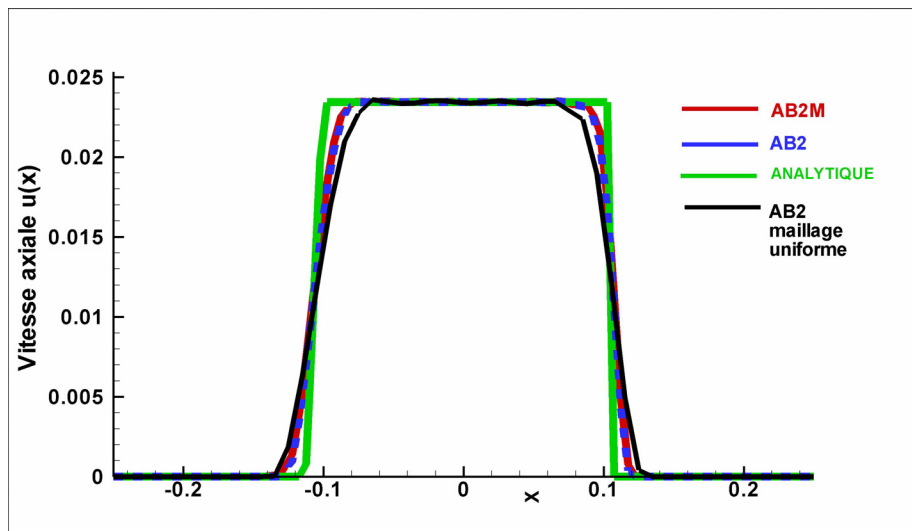


Fig.6.8: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M4, niveau=1

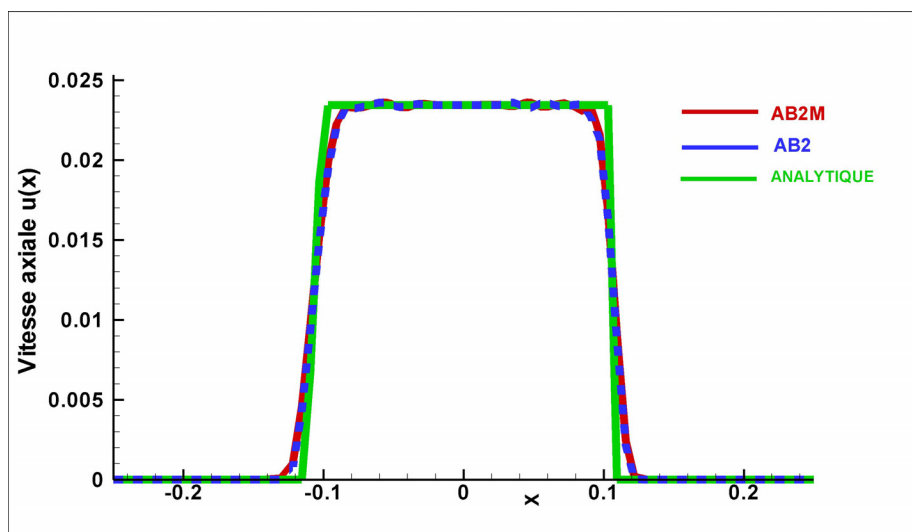


Fig.6.9: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M6, niveau=3

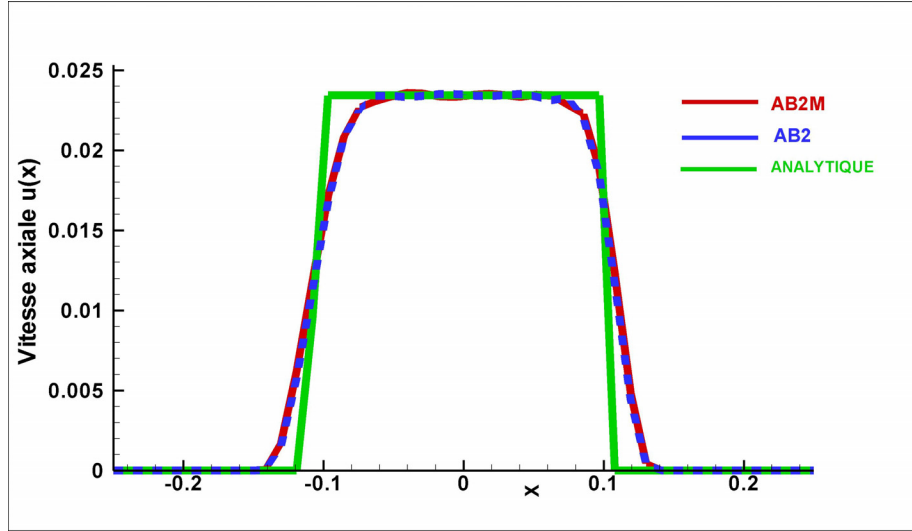


Fig.6.10: Tube à choc: Champs de vitesse axiale, maillage M7, niveau=6

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain théorique	Gain numérique
AB1M	0.061	0.0193	46.1656	9.6808	1.59	1.55
AB1	0.095	0.0192	46.1651	9.6807		
Erreur (AB1M/AB1)		+0.5%	-0.001%	-0.001%		

Tab.6.6: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M4, niveau=1

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain théorique	Gain numérique
AB2M	0.106	0.01057	48.889	9.696	1.59	1.71
AB2	0.182	0.01052	48.682	9.698		
Erreur (AB2M/AB2)		+0.4%	+0.4%	-0.02%		

Tab.6.7: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M4, niveau=1

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain théorique	Gain numérique
AB1M	0.111	0.01024	47.4	9.678	3.41	3.14
AB1	0.349	0.01022	47.3	9.675		
Erreur (AB1M/AB1)		+0.2%	+0.2%	+0.03%		

Tab.6.8: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M6, niveau=3

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain théorique	Gain numérique
AB2M	0.168	0.01060	49.79	9.690	3.41	4.14
AB2	0.696	0.01057	49.64	9.691		
Erreur (AB2M/AB2)		+0.3%	+0.3%	-0.01%		

Tab.6.9: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M6, niveau=3

Méthode	CPU	$\ u - u_{ex}\ _2$	$\ \rho - \rho_{ex}\ _2$	$\ p - p_{ex}\ _2$	Gain théorique	Gain numérique
AB2M	0.48	0.01042	47.10	9.703	8.36	10.66
AB2	5.12	0.01038	46.89	9.705		
Erreur (AB2M/AB2)		+0.4%	+0.4%	-0.02%		

Tab.6.10: Tube à choc: Temps CPU et erreur de calcul, maillage M7, niveau=6

6.2.1.2.1 Précisions

Pour un maillage uniforme, les deux approches donnent les mêmes résultats.

Comme attendu, on remarque sur les deux premières figures que les résultats sont améliorés avec le raffinement de maillage pour l'ordre 1 et 2 (Fig.6.7 et Fig.6.8). Ceux obtenus avec le raffinement en utilisant les méthodes d'ordre 1 AB1 et ABM1 sont quasi identiques (Fig.6.7 et Tab.6.6) avec une erreur relative inférieure à 0.5% pour la vitesse et faible pour les grandeurs ρ et p .

Sur les figures (Fig.6.9 et Fig.6.10), où on présente les comparaisons des méthodes sur les maillages de niveau de CFL 3 et 6, on observe des résultats similaires. Un résultat important à noter est que toutes les erreurs relatives commises avec l'approche multi-échelle par rapport à la méthode sans multi-échelle sont très petites, elles sont comprises entre -0.001% et +0.5%.

Pour les deux dernières simulations avec les maillages M8 et M9, où des raffinements extrêmes sont effectués, on ne gagne pas en précision au niveau des résultats par rapport à un maillage uniforme.

Malgré la grande disparité des tailles qui existent dans le maillage M7, on note une bonne stabilité du schéma, cela peut être observé sur la figure Fig.6.10 et au niveau du tableau Tab.6.10 concernant les erreurs commises. Un bon accord entre les deux approches AB et ABM au niveau des précisions des résultats est observé. Cependant une nette différence existe entre ces approches concernant les temps de calcul pour réaliser les simulations.

6.2.1.2.2 Temps de calcul

Si on utilise la précision du premier ordre pour les trois premiers maillages, on a un gain de 1.55 (Tab.6.6) pour M4 de niveau de raffinement 1 et 3.14 (Tab.6.8) pour M6 de niveau 3. Ces gains représentent respectivement 97% et 92% du gain théorique. Ces gains s'expliquent par le fait que les flux numériques sont calculés moins de fois avec l'approche multi-échelle. Pour le calcul de ces flux avec cette approche, des tests d'optimisation sont effectués à chaque pas de temps en faisant des itérations sur les niveaux de CFL et cela génère de petites pertes en temps de calcul. Elles représentent ici 3% pour M4 et 8% pour M6 par rapport aux temps de calcul.

Pour ces mêmes maillages avec la précision du deuxième ordre, on observe des gains respectifs de 1.71 et 4.14 (Tab.6.7 et Tab.6.9).

Cela est aussi valable pour le maillage M7 où le gain numérique est de 10.66 (Tab.6.10). Ces gains numériques sont supérieurs aux gains théoriques. L'explication vient du fait qu'on n'appelle pas la méthode de Barth pour calculer les limiteurs de gradient des variables conservatives lors des itérations sur les niveaux de CFL. Cet algorithme est effectué au macro pas de temps: $\Delta t = 2^{\text{Level_max}} \Delta t_n$.

Si on appelle la méthode de Barth pour l'ordre de précision 2, on a remarqué que les gains numériques sont de mêmes que pour l'ordre 1. Avec des maillages de niveau de CFL 11, les gains sont de l'ordre de 30.

Ces résultats présentés montrent bien la capacité de l'approche multi-échelle à donner de bons résultats similaires avec la méthode AB2. Les gains en temps de calcul sont très importants. A ce deuxième stade de notre validation, on peut conclure sur la performance et la rapidité de l'approche multi échelle à garder la précision des résultats avec des temps de calcul meilleurs. Ces résultats valident cette méthode pour les problèmes monodimensionnels. Le prochain paragraphe concernera la validation de cette méthode dans le cas bidimensionnel pour un problème bi-fluide.

6.2.2 Propagation d'une onde solitaire

Dans ce paragraphe, on valide les méthodes numériques d'Adams-Bashforth dans le cas bi-fluide. La propagation de vague 2D est étudiée. Une approximation du second ordre en temps et en espace (MUSCL) avec le limiteur de Barth est utilisée. On compare les résultats des simulations réalisées avec E2, AB2 et avec l'approche multi-échelle ABM2. On lance les trois calculs sur un même serveur (12 Itanium II 1.5 GHz) sans MPI.

Le domaine de calcul est de $25m$ de long et $5m$ de hauteur. Pour l'initialisation [Tanaka, 1986], nous générons un profil d'onde solitaire exact qui est la solution potentielle incompressible des équations d'Euler. L'amplitude de la vague est $h=0,6m$ et se propage à une vitesse de phase de $3.92m/s$. Une condition de miroir est imposée sur les côtés latéraux et une pression atmosphérique en haut du domaine. La vague est propagée sur $2.5s$. Les conditions initiales sont illustrées sur la figure Fig.6.11 pour la densité des fluides.

Le maillage est hexaédrique et comporte 127704 cellules. Pour y dans $[-0.35, 0.65]$, on a $dx=0.02m$, $dy=0.02m$, $dz=5m$ (66356 mailles) et pour y dans $[-1, -0.35]$ et $[0.65, 4]$ on a $dx=0.04m$, $dy=0.04m$, $dz=5m$ (61348 mailles). Ce maillage comporte 66356 cellules de niveau 0 et 61348 cellules de niveau 1. L'utilisation de ce maillage non uniforme est très bénéfique pour ces types de problème à surface libre. La région centrale qui couvre l'onde (Fig.6.13) est maillée finement pour augmenter la précision de la résolution. La transition entre les niveaux de cellules est représentée sur la figure Fig.6.12.

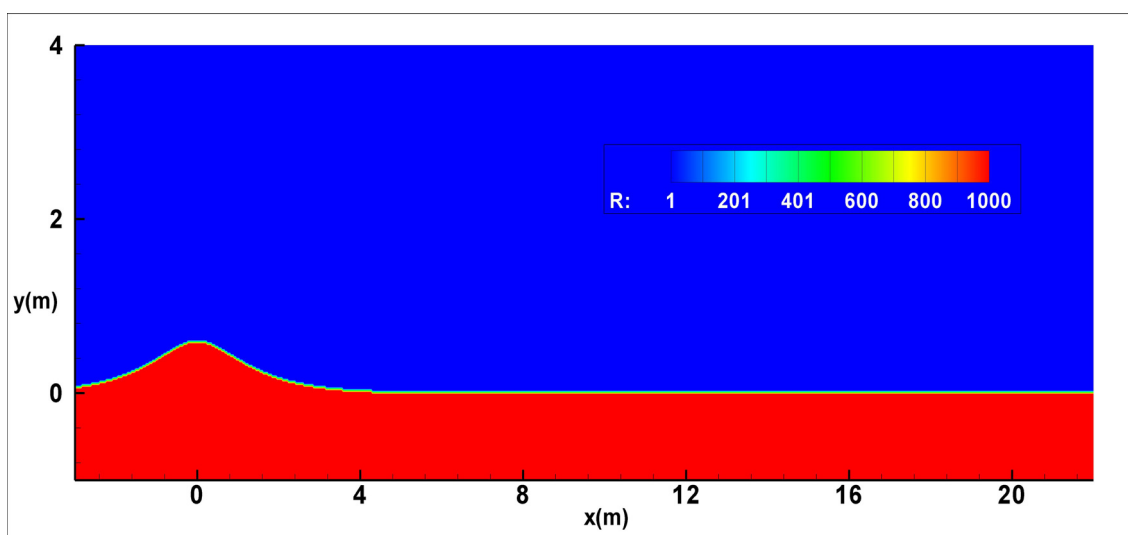


Fig.6.11: Propagation d'onde: Initialisation pour la densité

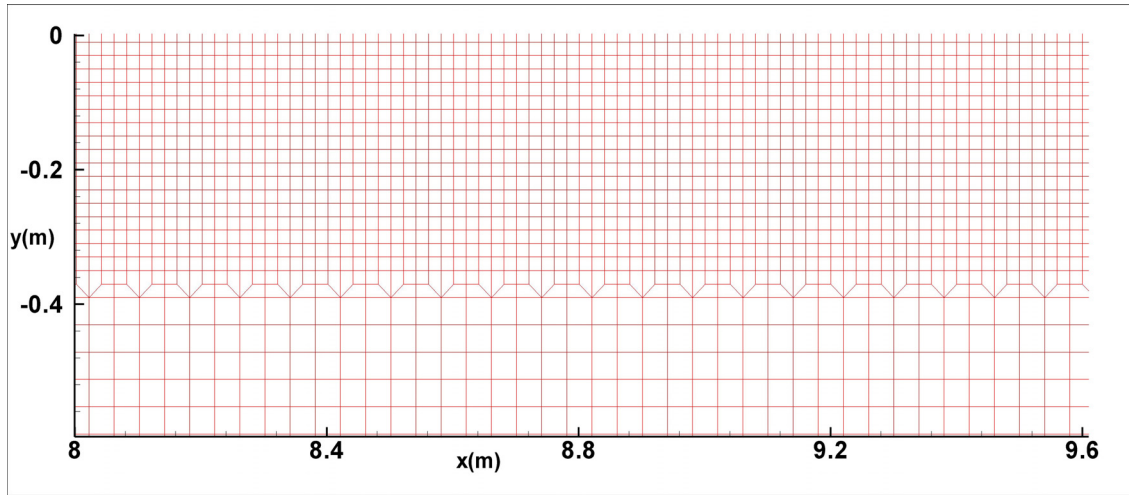


Fig.6.12: Propagation d'onde: Maillage du domaine de calcul

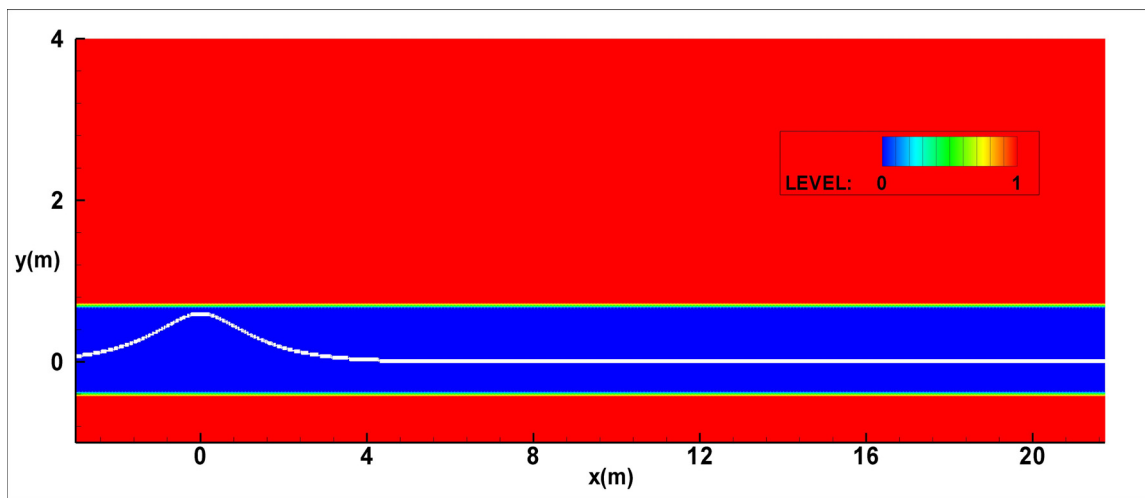


Fig.6.13: Propagation d'onde: Raffinement et Niveaux de CFL

Pour cette simulation, on obtient les résultats suivants pour les profils de la surface libre et les temps de calculs avec les trois méthodes E2, AB2 et AB2M. Toutes les isosurfaces ou surfaces libres ont été obtenues pour une fraction volumique de 0.5 ($\varphi = 0.5$).

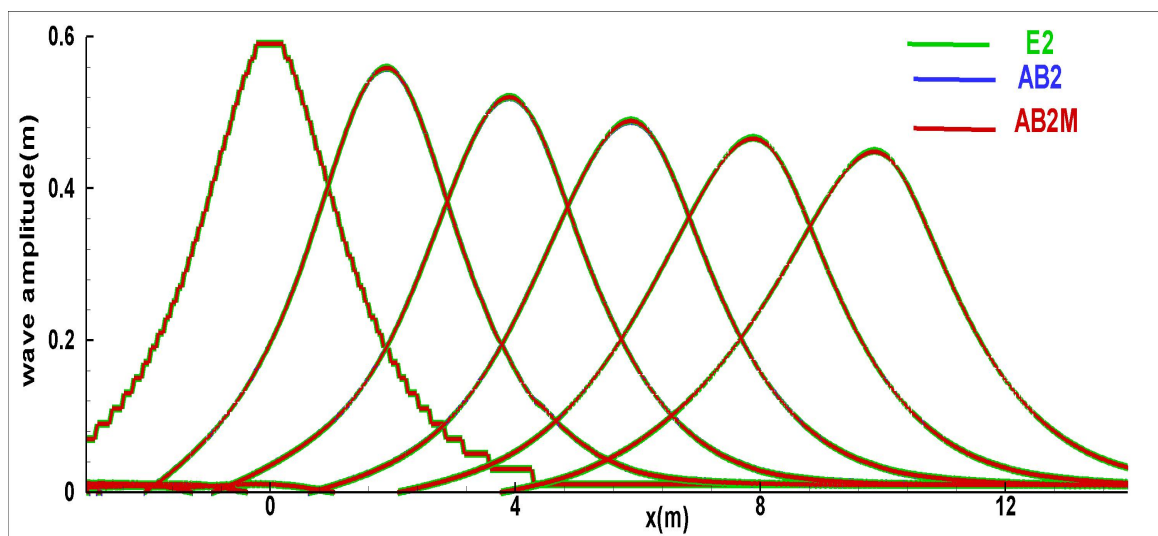


Fig.6.14: Propagation d'onde: Profil de la surface libre à $t=0, 0.5s, 1.0s, 1.5s, 2.0s, 2.5s$

Sur la figure Fig.6.14, on représente l'évolution de la surface libre du milieu air-eau avec les méthodes E2, AB2 et AB2M. On constate aisément que les résultats sont quasi identiques entre les trois modèles numériques. Si on observe l'amplitude de la vague à $t=2s$, on constate un écart par rapport à E2 de 0.004% pour AB2 et 0.115% pour AB2M.

Toutes les autres variables comme la vitesse, la densité et la pression sont presque identiques pour ce cas test. Ces résultats permettent de valider l'implémentation de la méthode AB2M pour les écoulements bi-fluides. Sur le tableau Tab.6.11, on donne les temps de calcul fournis par les différentes méthodes utilisées pour un temps de simulation de 2.5 secondes avec 127704 cellules. On remarque que le schéma E2 nécessite 20h53mn en temps de calcul, ce temps est de 11h48mn pour AB2 et 7h35mn pour l'approche multi-échelle AB2M. Soit un gain de **2.7** pour un même résultat. Ceci prouve la pertinence et la validité de la méthode AB2M.

E2	AB2	ABM2
20h 33mn	11h 48mn	7h 35mn
Gain=1	Gain=1.73	Gain=2.69

Tab.6.11: Propagation d'onde: Temps CPU et erreur de calcul, niveau=1

Conclusion

Avec ces deux cas tests effectués sur le tube à choc et sur la propagation de la vague, on peut dire que la méthode d'Adams-Bashforth avec l'approche multi-échelle est très performante. Elle donne des résultats satisfaisants, fournit une qualité de résultats comparables à celle d'Adams-Bashforth et d'Euler et permet un gain très important en temps de calcul. Ce gain est proche de celui trouvé théoriquement par la formule Eq.6.1. Ces résultats sont très encourageants.

Cette approche multi échelle est généralisée au cas tridimensionnel, l'algorithme a été implémenté en 3D. Des résultats 3D avec cette méthode seront étudiés et présentés ultérieurement dans le cas d'un déferlement de vague et dans le cas d'une rupture de barrage avec obstacle. Dans le solveur utilisé, le maillage du domaine de calcul est pour l'instant considéré comme une donnée statique, il ne varie pas au cours du calcul. L'intérêt de cette méthode sera beaucoup plus considérable avec une technique d'adaptation ou raffinement dynamique de maillage. Un module qui permettrait d'intégrer dans ce code la notion de maillage dynamique serait très bénéfique.

6.3 Validation de la méthode de raidissement d'interface

6.3.1 Propagation d'une onde solitaire

On considère le problème bi-fluide décrit au paragraphe (cf.6.3.1) pour l'étude de l'onde solitaire avec les mêmes conditions initiales et conditions aux limites. Ce cas test est intéressant pour valider notre méthode de raidissement car il présente une interface eau/air se propageant dans un récif plat sans obstacle. Le soliton doit se propager sans se déformer et cela permet d'évaluer la diffusion numérique des méthodes utilisées. Les champs de vitesse et de vorticité à l'instant initial sont illustrés sur la figure Fig.6.15. Ces deux graphes seront utilisés comme référence pour la comparaison des méthodes AB2 et AB2C (Adams-Bashforth avec compression).

Nous allons présenter les résultats obtenus pour ce cas et faire une comparaison entre les modèles numériques avec et sans compression d'interface. Les premiers résultats ont été

obtenus avec un coefficient de compression de $\eta = 1$. Une étude de sensibilité sur cette variable de compression est aussi faite dans cette partie et des cas tests sont effectués avec différentes valeurs de celle-ci. Les méthodes d'Adams Bashforth précédemment validées sont utilisées. Le temps de simulation est de 2.5 seconde. Les temps de calculs sont quasi identiques pour les deux méthodes: 11h 48mn pour AB2 et 11h 41mn pour Adams-Bashforth d'ordre 2 avec compression, notée AB2C. Ceci s'explique par le fait qu'on ne fait pas de calcul supplémentaire pour la méthode de compression mais un couplage direct de l'équation modélisant la surface avec l'étape de réinitialisation décrite dans le chapitre 5.

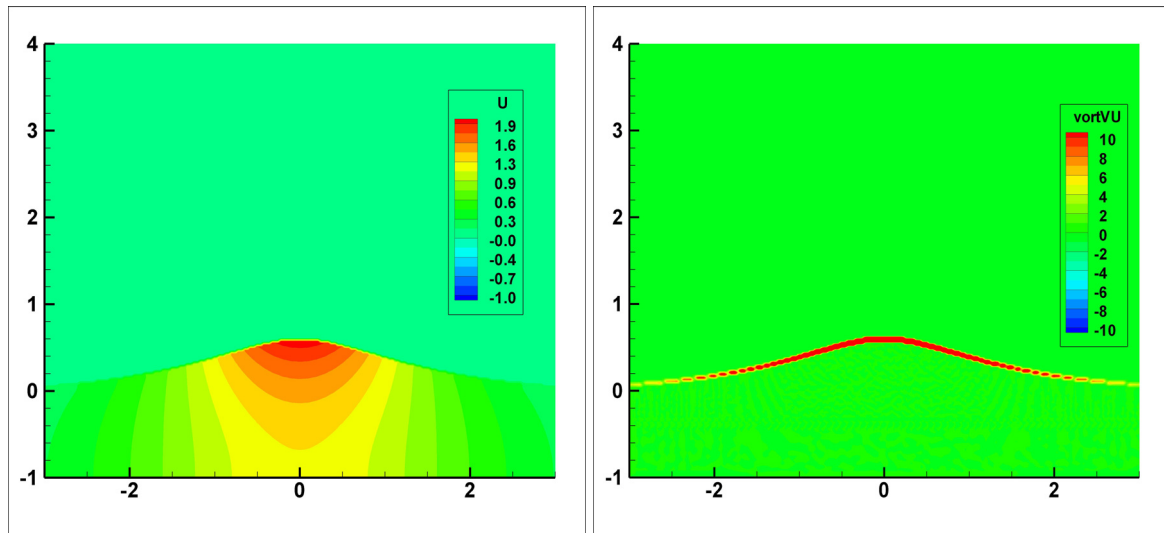


Fig.6.15: Propagation d'onde: Vitesse (droite) et vorticité horizontale (gauche) à l'initialisation

On présente ci-dessous les champs de densité des deux fluides (Fig.6.16), les vitesses axiales (Fig.6.17), les champs de vorticité horizontale avec la figure Fig.6.18 et l'élévation de la surface libre (Fig.6.19). Pour la conservation de la masse, on présentera l'évolution de la masse totale dans le domaine de calcul (Fig.6.20) ainsi que sa variation sous forme de tableau (Tab.6.12).

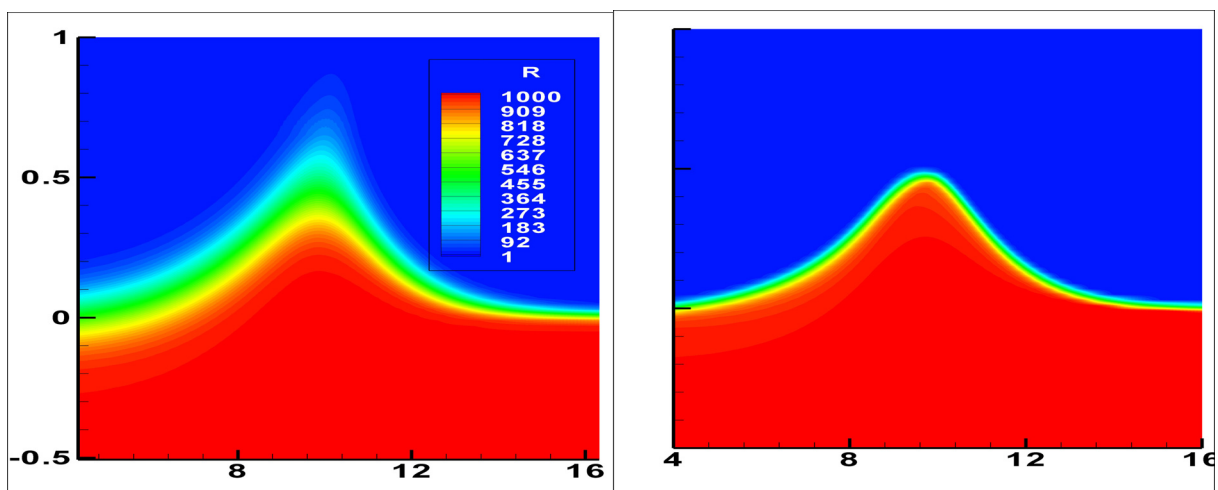


Fig.6.16: Propagation d'onde: Densité avec AB2(gauche) et AB2C(droite) à $t=2.5s$

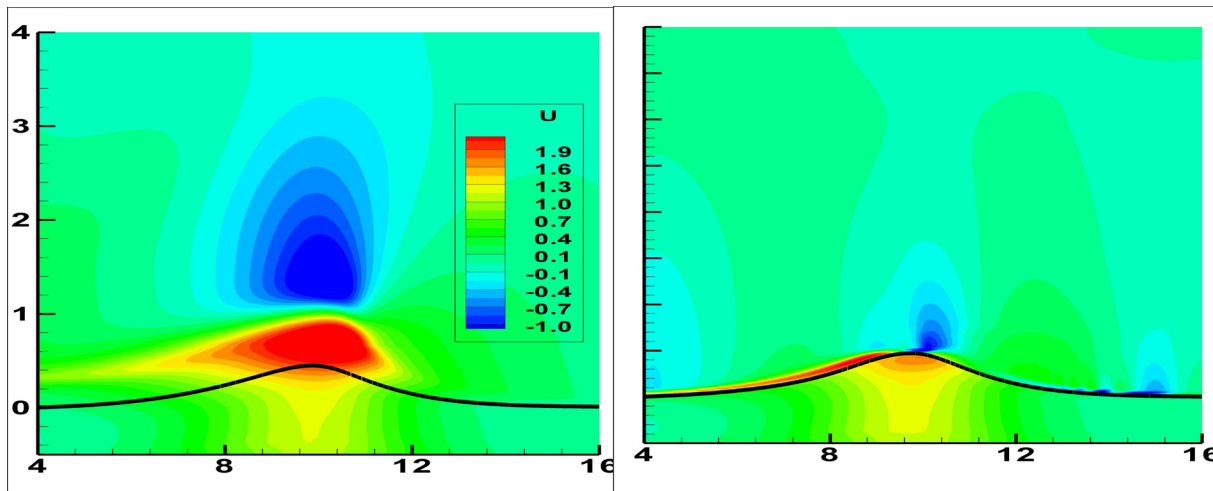


Fig.6.17: Propagation d'onde: Vitesse horizontale avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) à $t=2.5s$ et profil de la surface libre

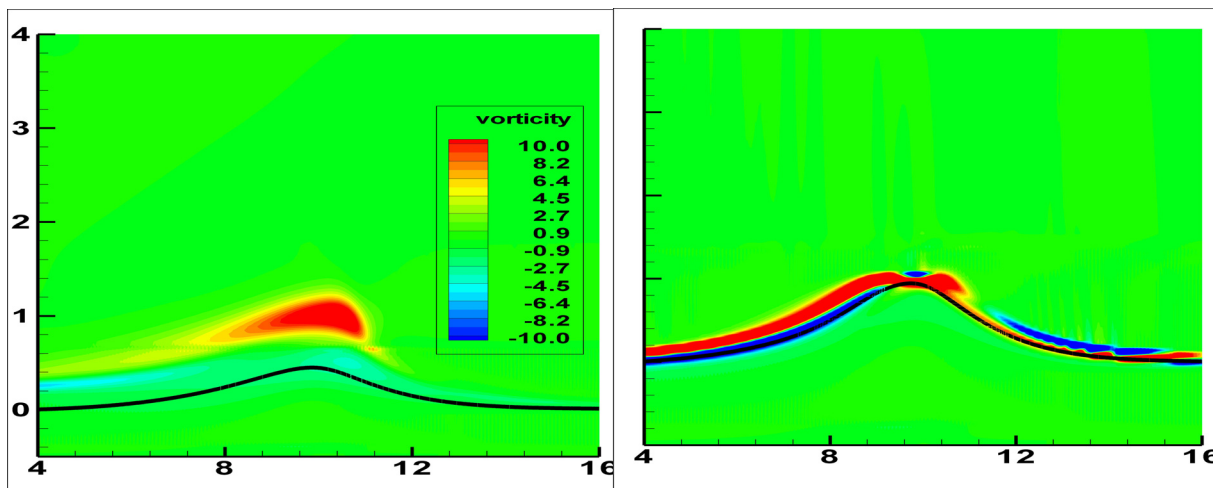


Fig.6.18: Propagation d'onde: Vorticité horizontale avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) à $t=2.5s$ et profil de la surface libre

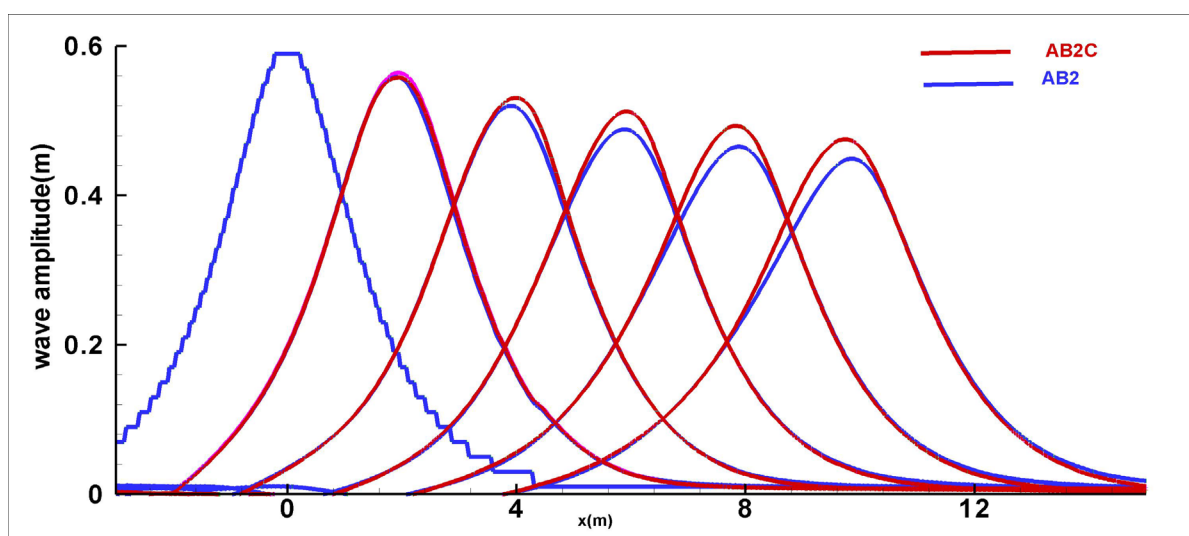


Fig.6.19: Propagation d'onde: Profil de la surface libre avec AB2C (rouge) et AB2 (bleu) à $t=0.s, 0.5s, 1.0s, 1.5s, 2.0s, 2.5s$

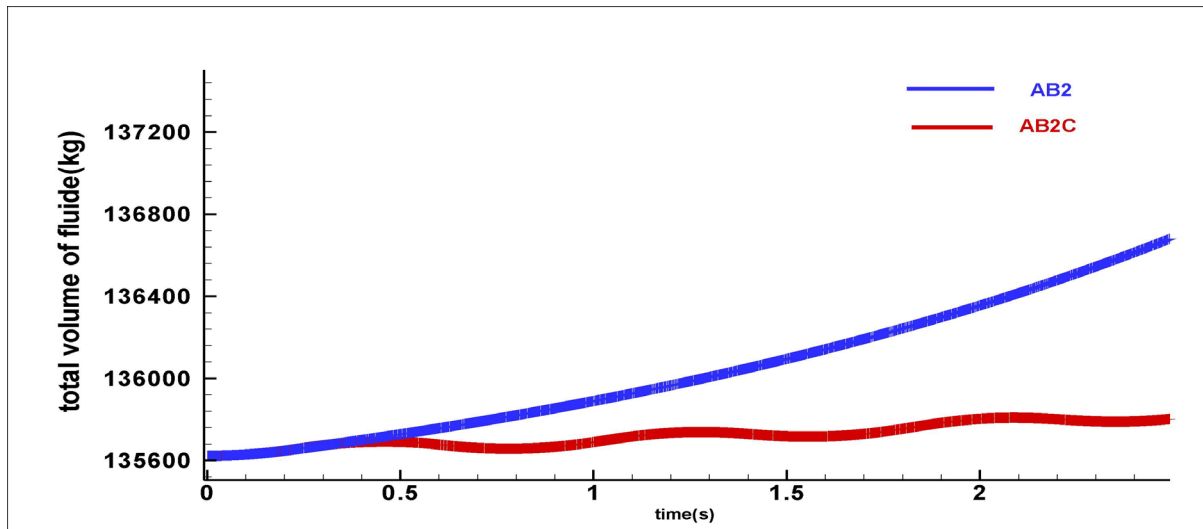


Fig.6.20: Propagation d'onde: Evolution de la masse totale avec AB2C (rouge) et AB2 (bleu) pour $t=0, 2s$

Ecart relatif	Δm	$\Delta \phi$
AB2C	0.121%	-0.04%
AB2	0.83%	0.08%

Tab.6.12: Propagation d'onde: Conservation de la masse: Erreur relative

La figure Fig.6.16 représente les densités des deux fluides en présence à $t=2.5s$ avec les méthodes avec (AB2C) et sans compression d'interface (AB2). Cette figure permet de voir la diffusion numérique au niveau de l'interface. Au début de la simulation pour des temps inférieurs à 0.5s, on comprime moins l'interface étant donné que sa diffusion numérique n'est pas encore très accentuée.

Pour des instants supérieurs (Fig.6.16), le phénomène de diffusion numérique s'accroît avec l'approche standard AB2. On retrouve la forme de l'interface similaire aux premiers instants pour la méthode de compression AB2C (Fig.6.16). Le taux de compression augmente en fonction du temps de simulation par le fait qu'on génère plus de diffusion au cours du temps et donc l'apport de la compression devient plus important.

Les résultats obtenus pour les champs de vitesse horizontale au niveau de l'air et de l'eau à $t=2.5s$ sont présentés sur la figure (Fig.6.17). On remarque une nette différence au niveau des vitesses entre les deux méthodes. Avec une diffusion de l'interface près de la crête de la vague, les vitesses sont surévaluées près de celle-ci et cela est dû au principe de conservation de la quantité de mouvement.

Cette surévaluation de la vitesse a tendance à écraser la crête et crée de la diffusion. Au-dessus de la vague, on a une vitesse de l'air très importante par rapport à la méthode sans compression. Les profils des champs de vitesse donnés par la méthode AB2C semblent être plus réalistes et sont mieux en accord avec la condition initiale sur la vitesse présentée sur la figure Fig.6.15.

Les champs de vorticité pendant la propagation de la vague sont présentés sur la figure Fig.6.18 à $t=2.5s$. Dans cette simulation, la vorticité est initialement nulle et apparaît seulement à la surface libre, cela peut se voir sur la figure Fig.6.15.   l'instant 2.5s, on remarque qu'un tourbillon positif est observé dans l'air au-dessus de la crête de la vague.

Cette zone de vorticité positive est plus fine avec la méthode AB2C comme dans la condition initiale. En avant de la vague, des vortic s négatives sont générées au-dessus de l'interface. Le transport de vorticité est mieux assuré avec la méthode AB2C.

La distribution de vorticité dans les deux fluides avec la méthode AB2C est en accord avec celle des cas d'ondes non déferlantes.   ce propos, le lecteur pourra consulter les travaux récents de Duval [Duval, 2007] sur l'étude de déferlement d'une onde de Stokes et de la dissipation associée par simulation direct.

La figure Fig.6.19 représente l'évolution de la surface libre avec les méthodes AB2 et AB2C   différents instants. On note une baisse de la hauteur de la cr te au cours du temps, cette hauteur est mieux conservée avec la méthode AB2C. Ce résultat confirme ce qui a été exposé précédemment sur la diffusion de l'interface et sur l'apport de la méthode de compression. Pour évaluer la qualité de la conservation pour les deux types de schémas, les écarts relatifs de la masse et de la fraction volumique sont calculés et représentés sur le tableau Tab.6.12. La méthode de compression préserve la conservation de la masse globale. Pour un temps de simulation de 2.5s, on a une conservation de la masse des deux fluides qui est de 0.12% avec compression et est de 0.8% avec la méthode sans compression.

Cela fait partie des avantages des méthodes de compression qui sont basées sur le principe de conservation de la masse. Sur la figure Fig.6.20, on constate que la masse est quasi-conservée tout au long de la simulation avec la compression. On verra dans le paragraphe suivant sur l'influence du coefficient de compression que cette conservation pourrait être améliorée par un choix optimal de cette variable η .

6.3.2 Influence du coefficient de compression

Le modèle de compression, précédemment validé, fournit des résultats en parfait accord avec la physique étudiée et la diffusion numérique de l'interface y est beaucoup moins importante. Cependant plusieurs questions se posent au niveau du paramètre de raidissement. On peut maintenant examiner la qualité des résultats fournis par ce modèle en faisant un test de sensibilité pour différentes valeurs du taux de compression η . η est décrite dans le paragraphe 5.3. Pour cela six cas de simulations ont été effectués avec des coefficients de compression différents.

Une étude de sensibilité est faite dans cette partie et des cas tests sont effectués avec différentes valeurs de compression pour étudier la sensibilité et la stabilité de la méthode. Il faut noter que pour des $\eta > 1$, on a de mauvais résultats, le calcul diverge. On présente les résultats des six simulations réalisées avec les évolutions de la surface libre (Fig.6.21 et Fig.6.22), des densités des fluides (Fig.6.24   Fig.6.27) et de la masse totale (Fig.6.23 et Tab.6.13).

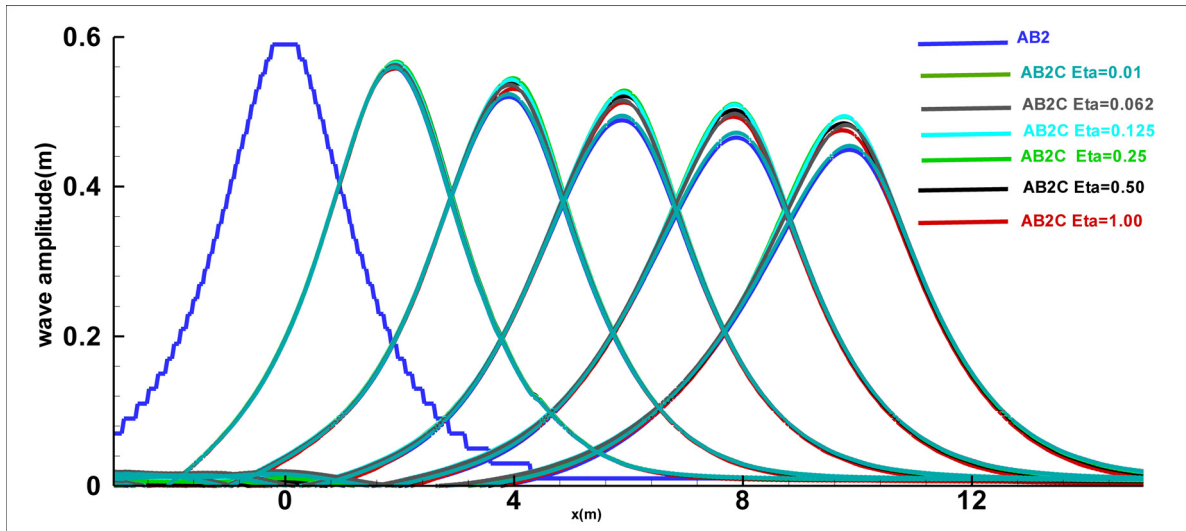


Fig.6.21: Propagation d'onde: Profil de la surface libre avec AB2C et AB2 pour $\eta=1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.01, t=0s; 0.5s; 1.s; 1.5s; 2.s; 2.5s$.

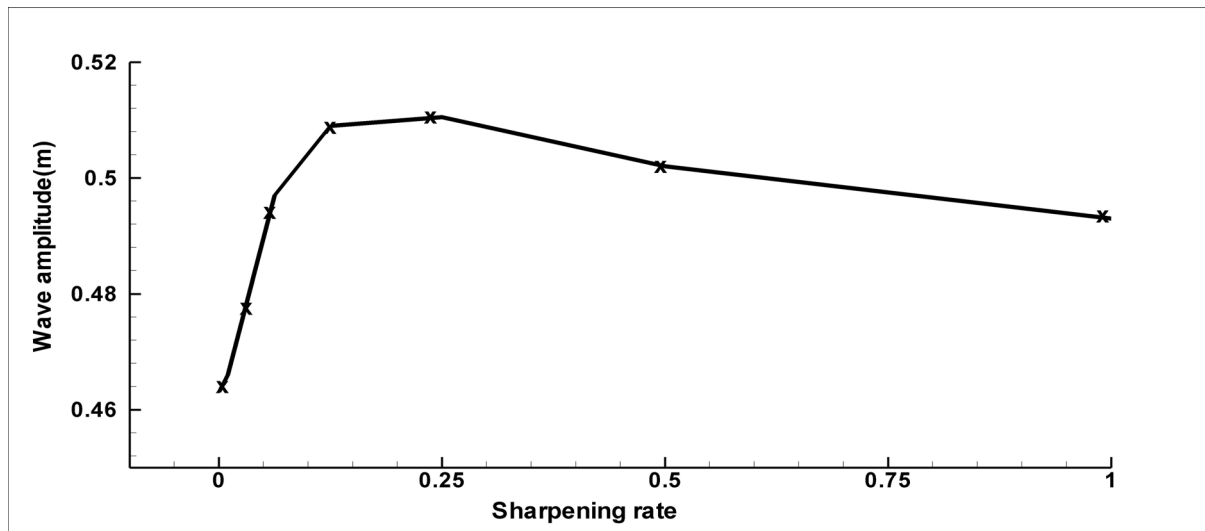


Fig.6.22: Propagation d'onde: Amplitude du soliton en fonction du taux de compression à $t= 2.s$.

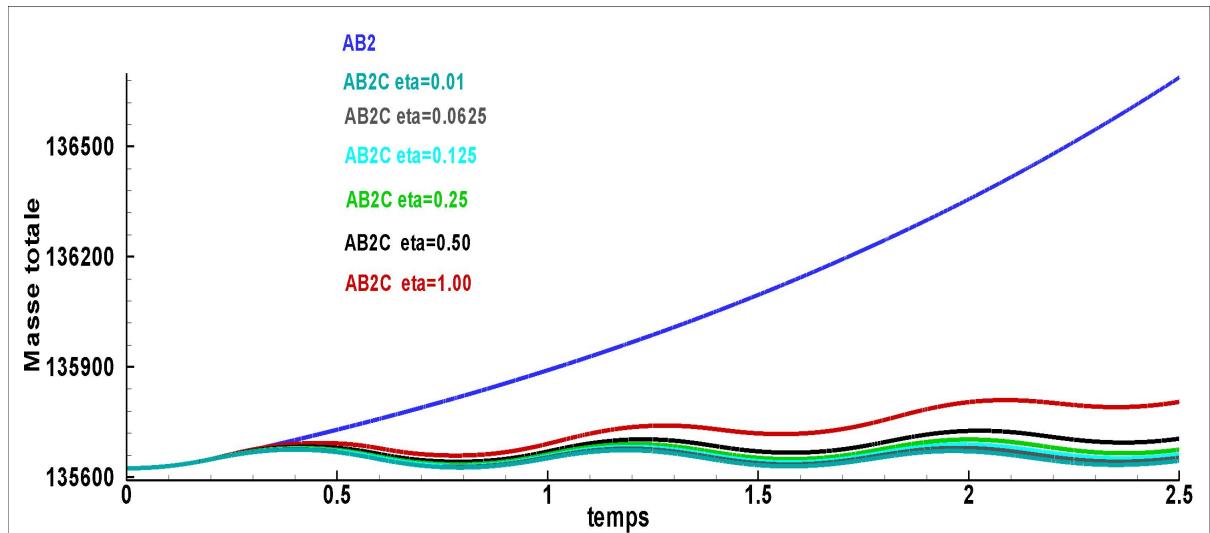


Fig.6.23: Propagation d'onde: Evolution de la masse totale avec AB2C et AB2 pour $\eta=1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.01, t=0.s \text{ à } 2.5.s$.

Ecart relatif	Cas	Δm	$\Delta \varphi$
$\eta = 0.0$	0	0.83%	0.08%
$\eta = 1.0$	1	0.121%	-0.04%
$\eta = 0.5$	2	0.055%	-0.016%
$\eta = 0.25$	3	0.033%	-0.008%
$\eta = 0.125$	4	0.025%	-0.004%
$\eta = 0.062$	5	0.018%	-0.002%
$\eta = 0.01$	6	0.011%	0.002%

Tab.6.13: Propagation d'onde: Conservation de la masse: Erreur relative pour différents η

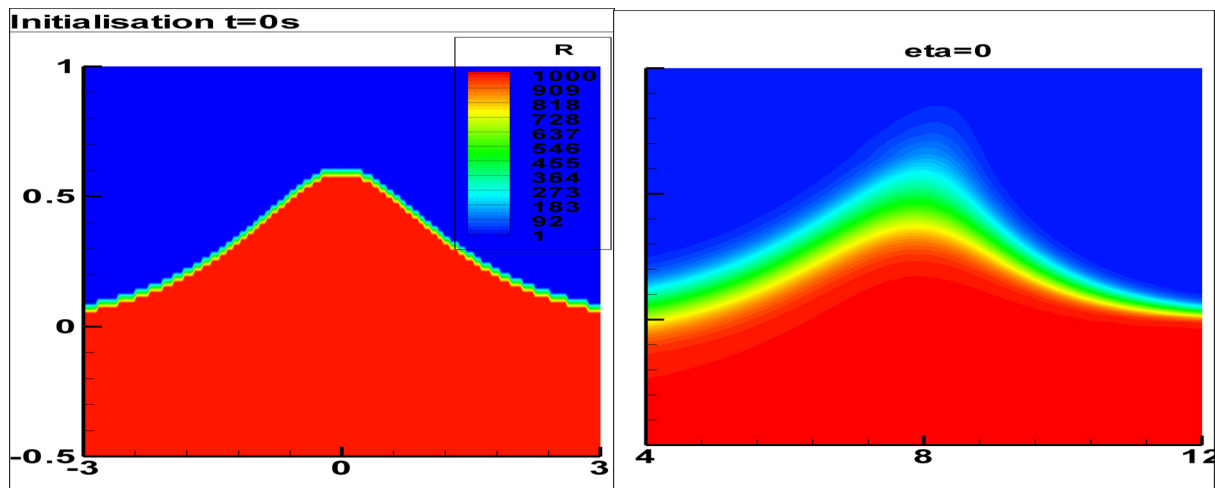


Fig.6.24: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0$ à $t=0.s, 2.0.s$.

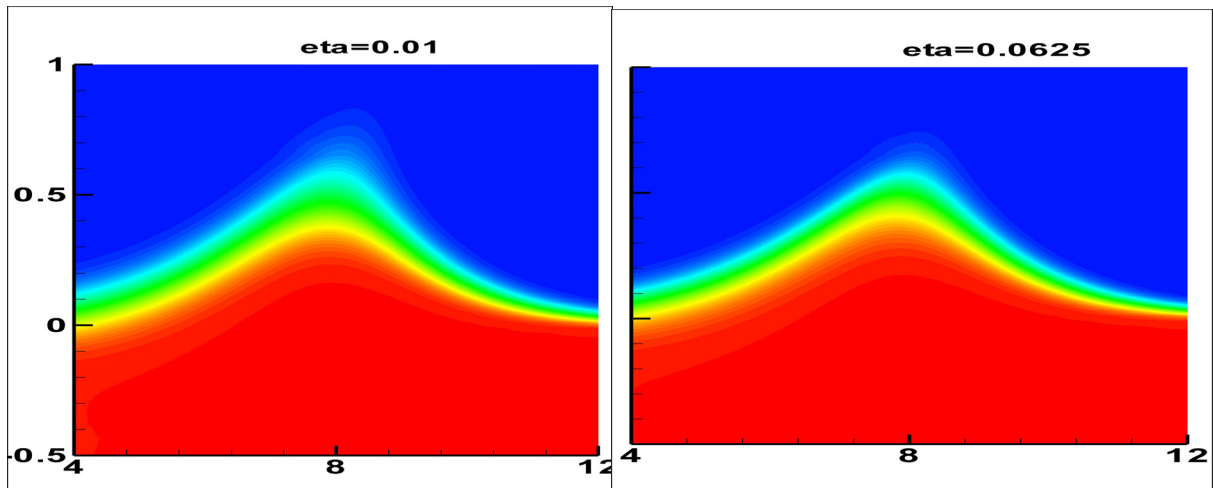


Fig.6.25: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.01, 0.0625$ à $t=2.0s$

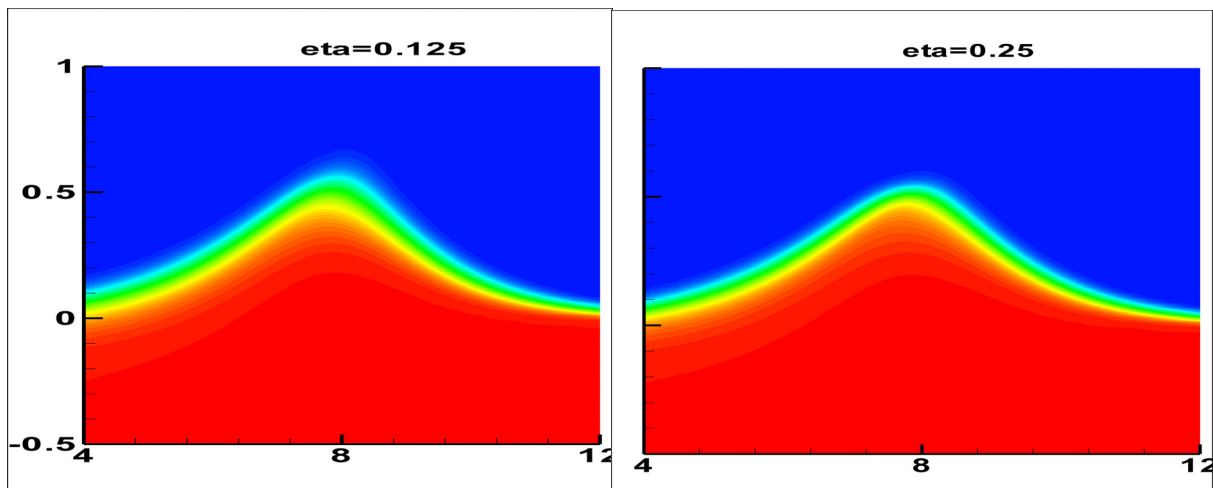


Fig.6.26: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.125, 0.25$ à $t=2.0s$

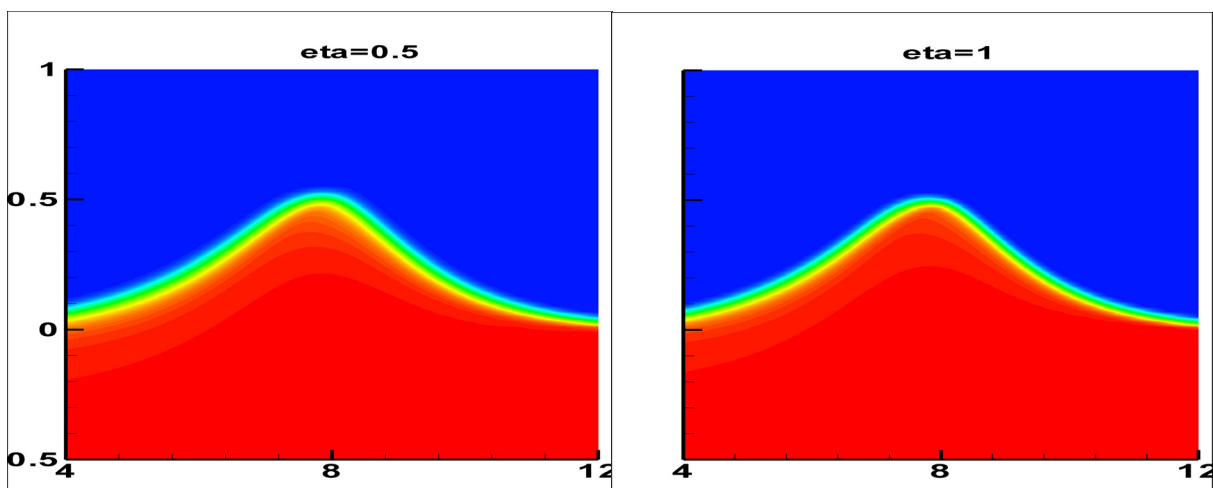


Fig.6.27: Propagation d'onde: Densité avec AB2C pour $\eta=0.5, 1.0$ à $t=2.0s$

La figure Fig.6.21 représente l'évolution de la hauteur de la crête pour différentes valeurs de compression à l'instant $t=2s$. L'isosurface $\varphi=0.5$ augmente pour des η compris entre $[0, 0.25]$ et elle décroît pour des η entre $[0.25, 1]$. La valeur $\eta=0.25$ semble être une asymptote. Cette

remarque se confirme avec la figure Fig.6.22 où on représente la hauteur de la crête pour différentes valeurs de η à $t=2s$. L'évolution de la masse totale dans le domaine de calcul reste bonne durant toute la simulation avec les approches avec compression (Fig.6.23). Pour des valeurs de $\eta > 0$, on peut noter que plus on diminue cette valeur, plus la conservation de la masse est satisfaite (Tab.6.13). Cependant on crée plus de diffusion au niveau de l'interface, par exemple pour $\eta = 0.01$, l'erreur relative est de 0.002% et la diffusion de l'interface est importante.

La conservation de la masse est améliorée sans aucune conséquence sur le temps de calcul. Les figures Fig.6.24 à Fig.6.27 représentent l'iso-densité du milieu air-eau, on constate aisément que l'utilisation d'un terme de raidissement améliore notablement la définition de l'interface. Une forte influence de la méthode peut être observée. Pour des $\eta < 0.25$, l'interface diffuse comme dans la méthode sans compression (Fig.6.22 à Fig.6.26). L'apport de la compression est meilleure pour $\eta = 1$ car pour cette valeur, l'interface représente une zone fine de diffusion numérique (Fig.6.27).

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les validations des différentes méthodes numériques implémentées lors de cette thèse. Les cas de validation ont été choisis pour leurs propriétés physiques et pour leurs complexités. Il s'agissait d'abord de valider la méthode d'Adams-Bashforth avec et sans l'approche multi-échelle. Ces méthodes ont donné des résultats satisfaisants et très similaires avec la méthode d'intégration d'Euler initialement disponible dans le code. On a aussi mis en évidence lors des comparaisons que ces méthodes permettaient des gains conséquents en temps de calcul et ce résultat est cohérent avec la formulation mathématique de ces schémas d'intégration.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, une méthode de couplage entre l'équation de convection et une équation de correction via un terme de compression a été validée. Cette méthode, basée sur un principe de réinitialisation de la fraction volumique pour une meilleure approche du calcul de l'interface, fournit des résultats satisfaisants. L'utilisation de cette méthode améliore les prédictions et les comparaisons ont démontré l'intérêt d'utiliser une telle méthode.

S'appuyant sur ces validations, ces deux méthodes sont maintenant deux bonnes candidates pour les futures simulations: la méthode d'Adams-Bashforth pour tous les types de problèmes avec ou sans raffinement, la méthode de compression pour les problèmes à surface libre. Dans le prochain et dernier chapitre qui achève nos travaux, nous présentons des cas d'applications avec ces deux méthodes numériques.

7. Quelques applications

Dans cette partie, le modèle numérique est utilisé pour traiter quelques problèmes rencontrés dans le domaine de l'ingénierie et dans le milieu de l'hydrodynamique offshore. Les applications concernent le déferlement 2D et 3D d'une vague sur une plage en présence des macro-rugosités. Ensuite le problème d'une rupture de barrage 3D en présence d'obstacle est traité. Toutes les simulations sont réalisées sur la base d'une résolution, en mode instationnaire, des équations d'Euler 3D bi-fluide. La turbulence et les effets visqueux ne sont pas pris en compte. Le schéma de Godunov et une approximation du second ordre en temps et en espace (MUSCL) avec le limiteur de Barth sont utilisés. Pour réduire les temps de calcul, on utilise une version parallélisée par sous domaines du code via MPI (Message Passing Interface). Les calculs sont menés sur un ordinateur parallèle SGI de 12 processeurs Itanium II à 1,5 GHz

7.1 Propagation et déferlement 2D d'une vague sur une plage

La validation des résultats numériques de la propagation des ondes jusqu'à l'impact du jet, y compris le shoaling et le mouvement de renversement, est basée sur l'étude de la vague déferlante sur une pente proposée par Grilli et al. [Grilli *et al.*, 1997]. Ce cas a été étudié expérimentalement par Li et Raichlen [Li et Raichlen, 1998]. On utilise dans ce paragraphe ces résultats expérimentaux [Li et Raichlen, 1998] pour les comparer avec nos résultats numériques.

Le domaine de calcul est de 27m de long et 4m de hauteur, avec une pente 1/15 à partir de $x=0$ m. L'amplitude du soliton est $h=0.45$ m et une condition de miroir est imposée sur les côtés latéraux et une pression atmosphérique en haut du domaine. On raffine près du déferlement et utilise un maillage de l'air grossier loin de l'interface. Le maillage est d'environ 1 million de mailles. Avec le raffinement réalisé, on dispose quatre niveaux de CFL (Fig.7.2). Le domaine est divisé en 12 sous-domaines (Fig.7.3) et chaque sous-domaine est consacré à un seul processeur.

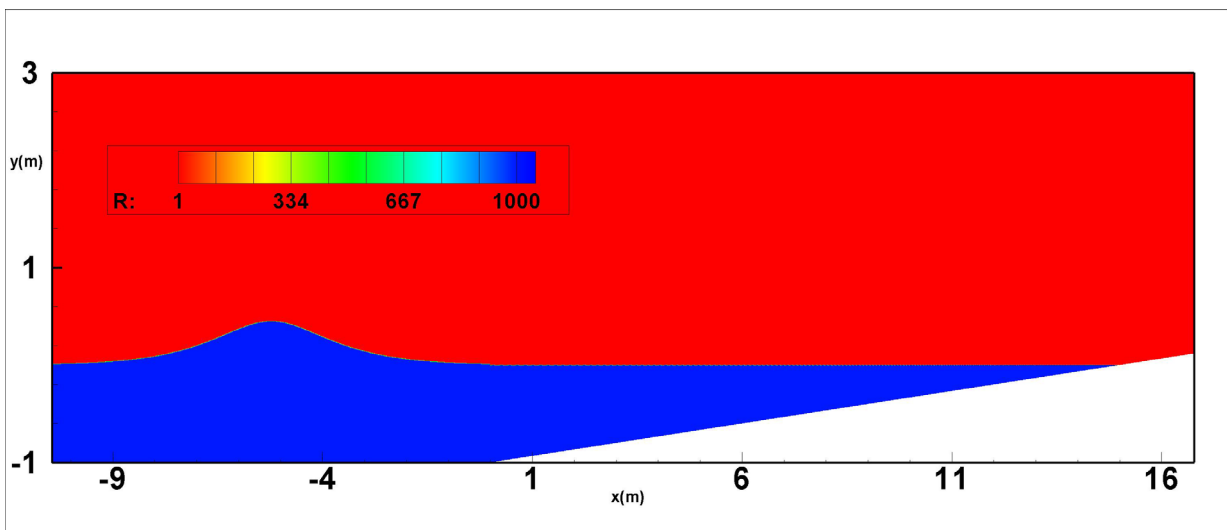


Fig.7.1: Déferlement de vague 2D: Conditions initiales

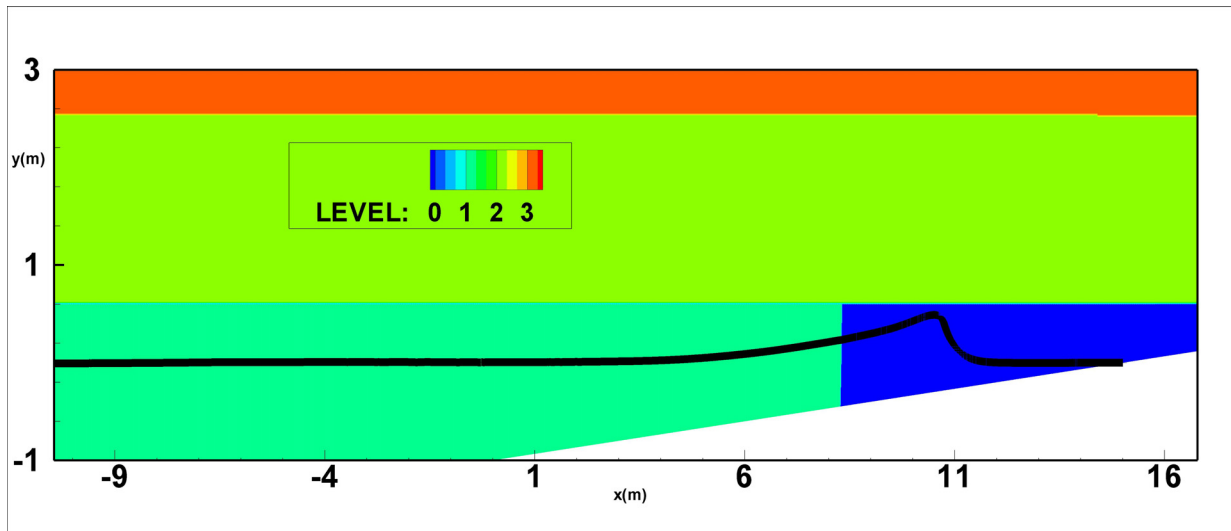


Fig.7.2: Déferlement de vague 2D: Géométrie et niveaux de taille de maille

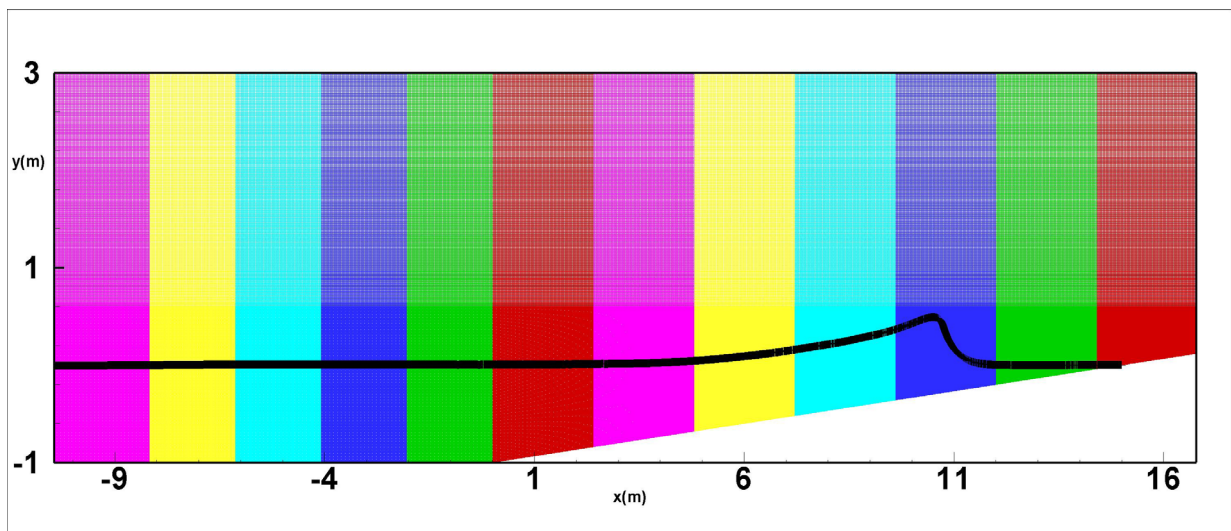


Fig.7.3: Déferlement de vague 2D: Décomposition du domaine de calcul pour l'utilisation de MPI et maillage

Le soliton est propagé sur 6s. Pour cette simulation, la méthode AB2 nécessite 102h et AB2M nécessite 64h de calcul, soit un gain de 1.59. Avant la comparaison avec les résultats de l'expérience, on évalue l'apport de la méthode de compression avec les courbes de la densité, de la vitesse et des vecteurs vitesses. La dynamique du déferlement sera décrite dans le prochain paragraphe.

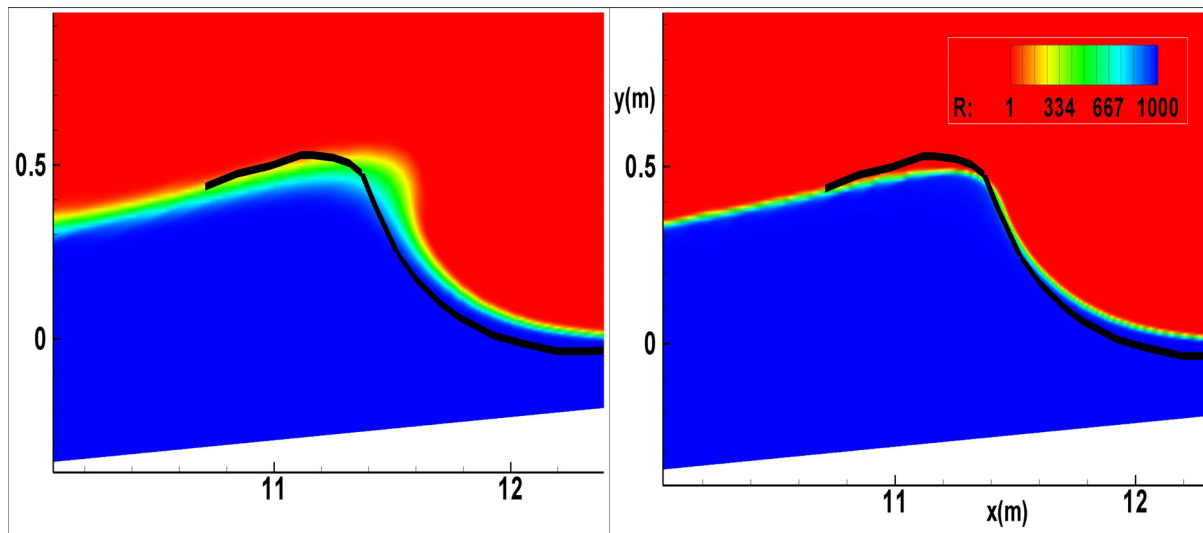


Fig.7.4: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t = 2.97s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite). Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.

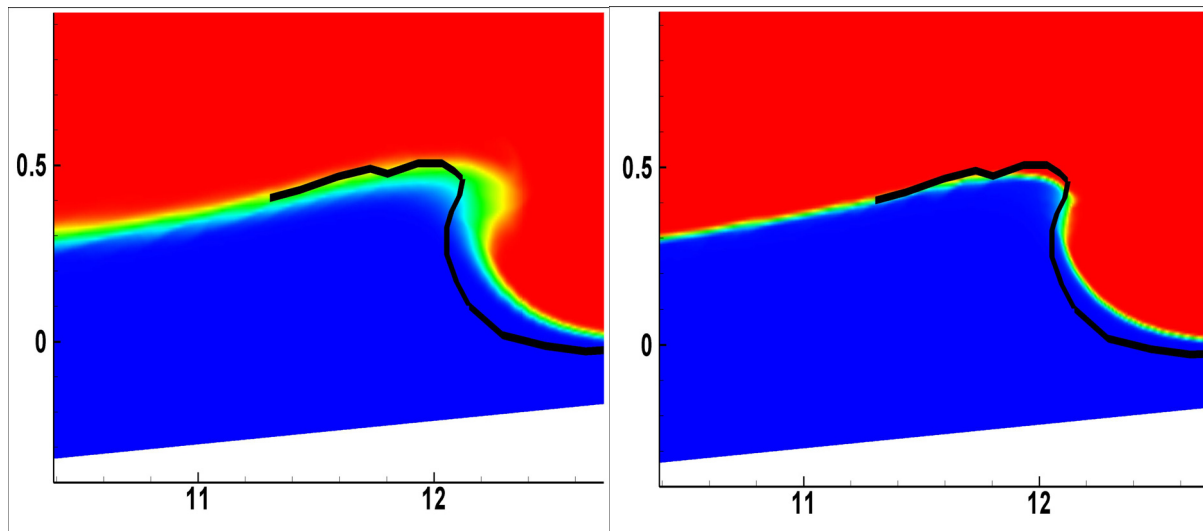


Fig.7.5: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t = 3.15s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite). Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.

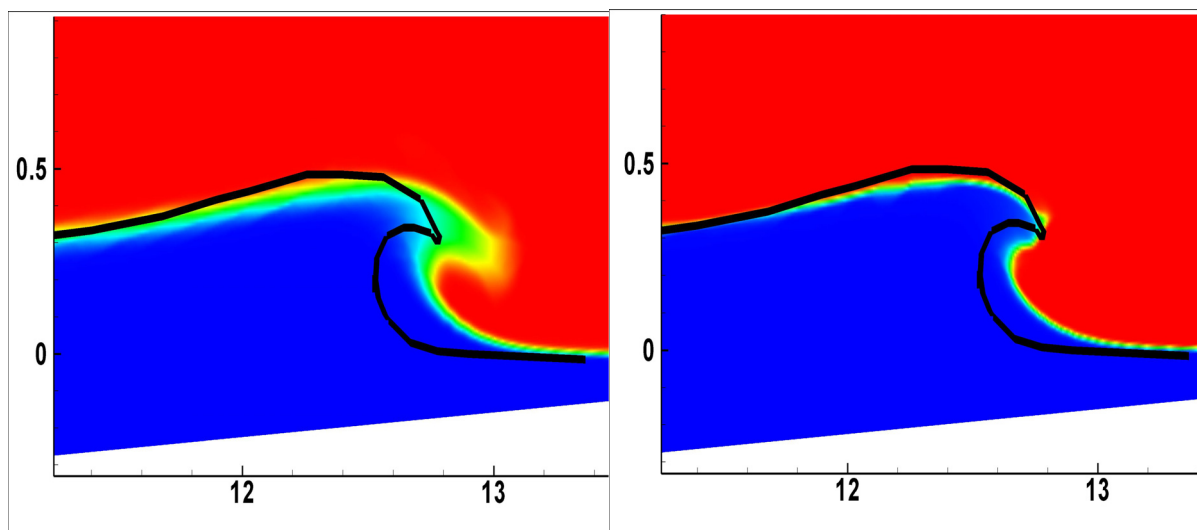


Fig.7.6: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t = 3.31s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite). Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.

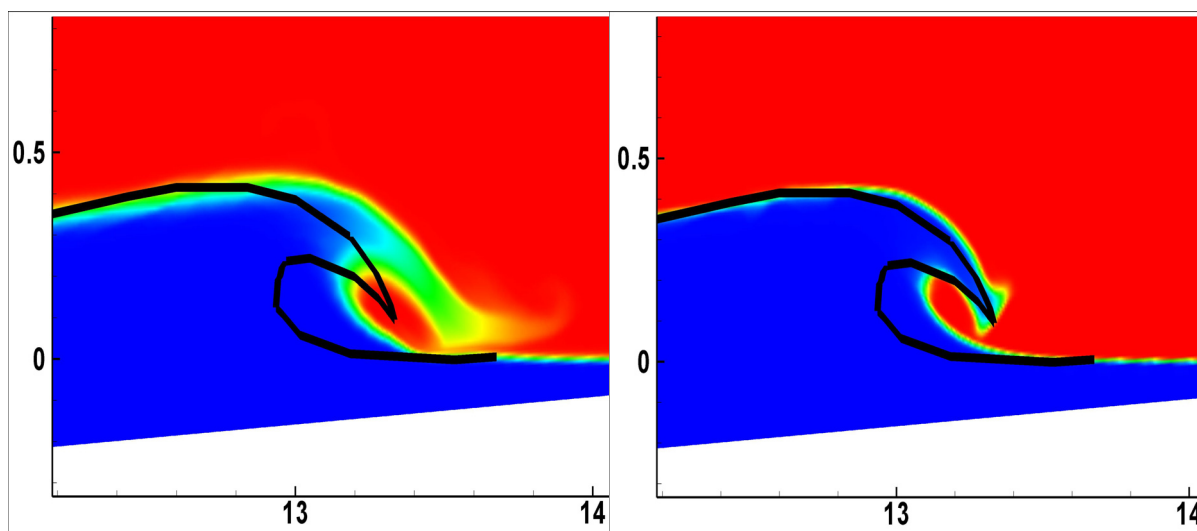


Fig.7.7: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: densité à $t = 3.45s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite). Courbe expérimentale pour la surface libre en noire.

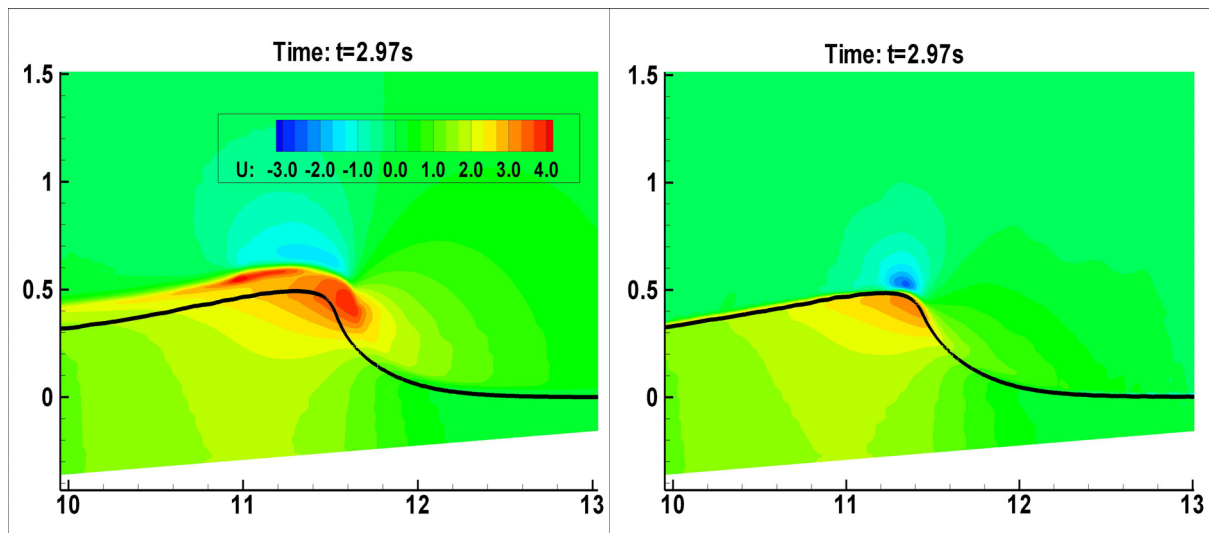


Fig.7.8: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: champs de vitesse à $t=2.97s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre

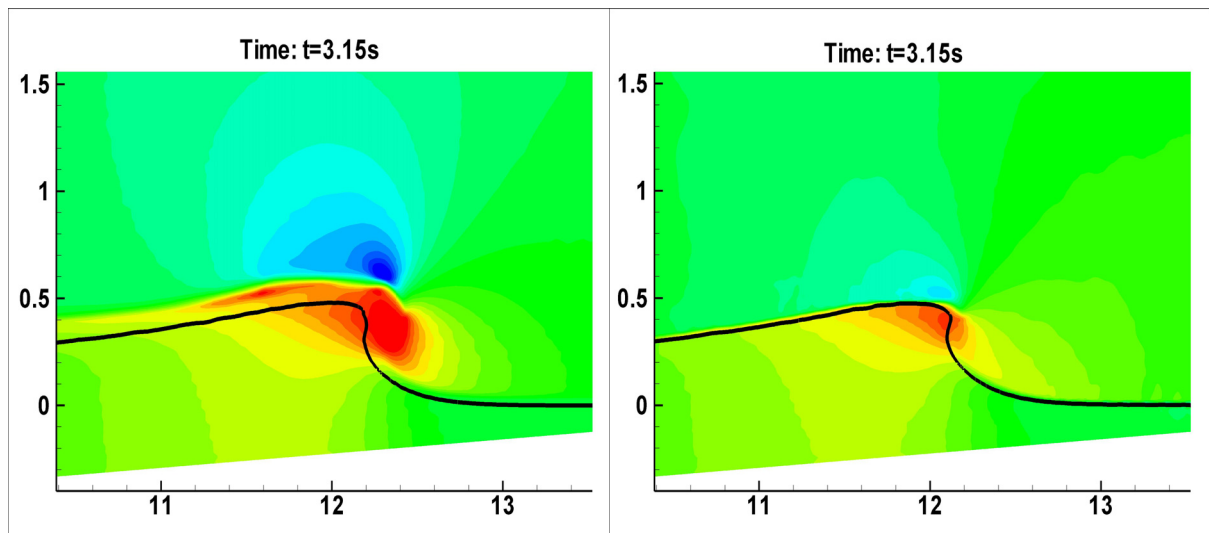


Fig.7.9: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: champs de vitesse à $t=3.15s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre

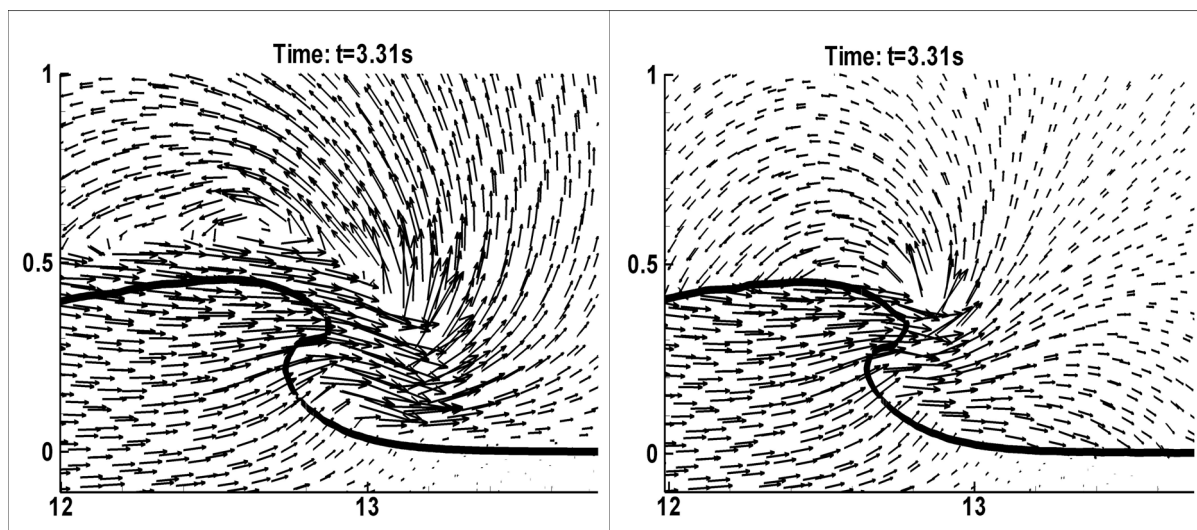


Fig.7.10: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: vecteur vitesse à $t=3.31s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre

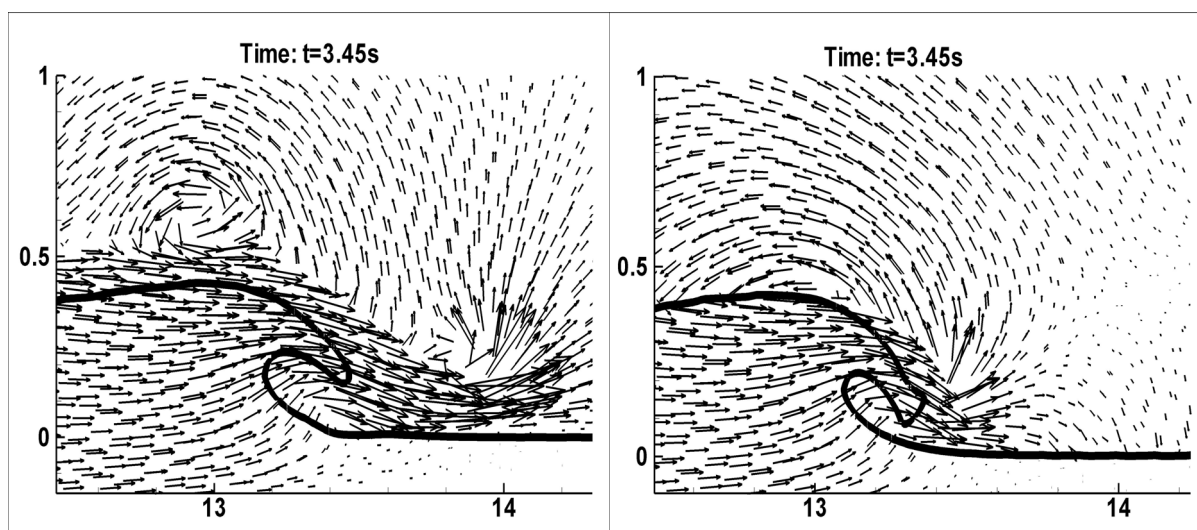


Fig.7.11: Déferlement de vague 2D: Influence de la compression: vecteur vitesse à $t=3.45s$ avec AB2 (gauche) et AB2C (droite) et profil de la surface libre

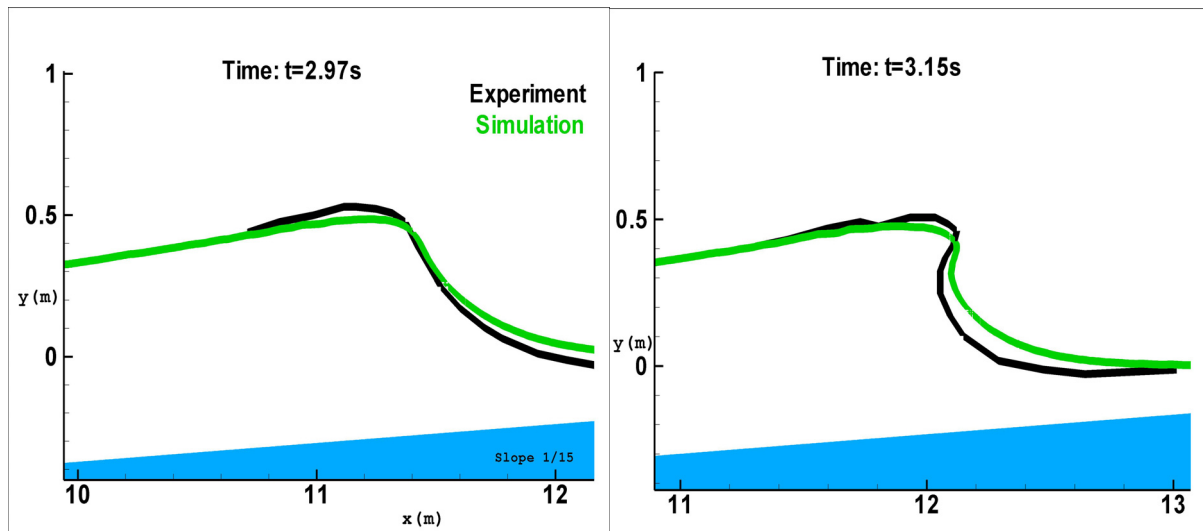


Fig.7.12: Déferlement de vague 2D: Profil de la surface libre à $t=2.97s$; $3.15s$.
Comparaison de la présente simulation AB2C(verte) avec l'expérience (noire).

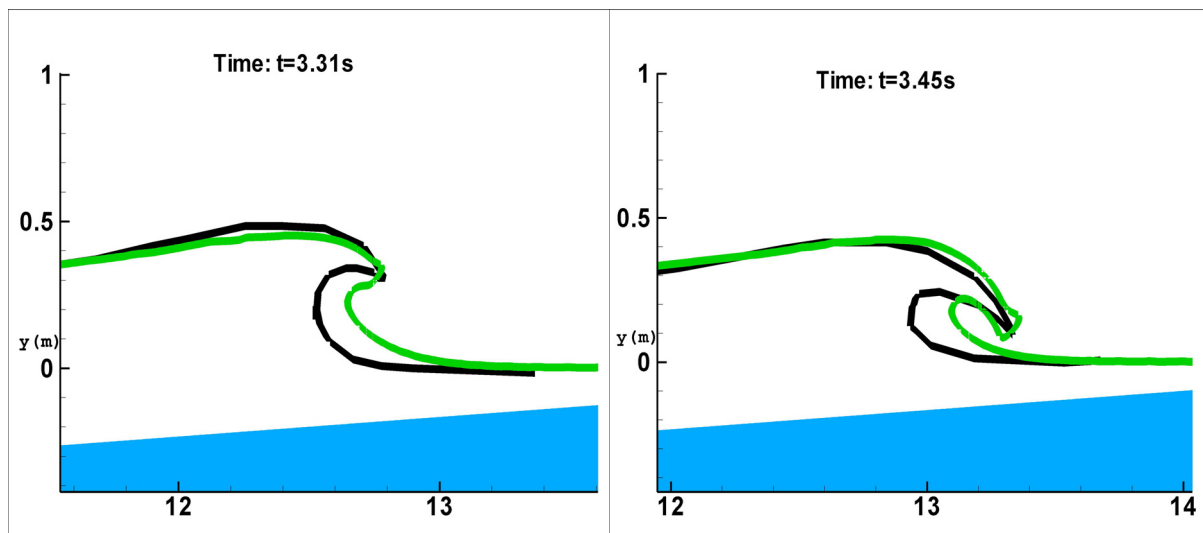


Fig.7.13: Déferlement de vague 2D: Profil de la surface libre à $t=3.31s$; $3.45s$.
Comparaison de la présente simulation AB2C(verte) avec l'expérience (noire).

Sur les figures Fig.7.4-Fig.7.7, on constate que la technique de compression d'interface améliore considérablement les résultats. En particulier, lors de l'impact, la confrontation expérience/simulation est bien meilleure avec la compression. Cette comparaison confirme l'apport des améliorations proposées. La précision est augmentée avec la méthode de raidissement et les temps de calcul sont notablement diminués avec l'approche multi-échelle. Les figures Fig.7.8 et Fig.7.9 représentent les champs de vitesse de l'écoulement aux temps $2.97s$ et $3.15s$. Avec la méthode sans compression, on observe toujours une surévaluation de la vitesse au niveau de la crête. Cela accentue le phénomène de diffusion de l'interface. Les champs de vecteur vitesse sont illustrés sur les figures Fig.7.10 et Fig.7.11. Ces deux courbes confirment le phénomène de la surévaluation de la vitesse au dessus de l'interface avec la méthode sans compression. Les deux écoulements sont proches avec les deux méthodes. Les figures Fig.7.12 et Fig.7.13 montrent une comparaison de la présente simulation avec les résultats expérimentaux de Li et de Raichlen [Li et Raichlen, 1998] pour les profils de la surface libre aux instants $t = 2.97$, 3.15 , 3.31 et $3.45s$. On peut noter un bon accord entre les expériences et les prédictions numériques du modèle. La dynamique du renversement et la

position de l'impact sont prédits. Certains écarts peuvent être observés dans la forme de l'onde, en particulier juste avant l'impact ($t= 3.31$ et $3.45s$), mais l'accord général est très satisfaisant.

Pour la dynamique du déferlement après l'impact, une comparaison pourrait être faite avec des études numériques existantes, voir par exemple [Lubin *et al.*, 2006]. Les restrictions exposées dans la section introductive sont rappelées ici: comme la turbulence et les effets visqueux ne sont pas pris en compte, l'applicabilité du modèle pourrait être limitée aux premières étapes du processus du déferlement pendant lesquels cette dynamique est dominée par des impacts, des rebonds et par de grandes structures tourbillonnaires.

7.2 Propagation et déferlement 2D d'une vague avec macro-rugosités

Après la validation précédemment présentée, on étudie dans cette partie le déferlement de vague solitaire sur une plage en présence de macro-rugosités. Notons que ces simulations ont été effectuées sans la méthode de compression et sans l'approche multi-échelle. Cette étude était antérieure aux deux contributions et permettait d'évaluer le modèle Euler bi fluide.

Nous étudions le déferlement de cette vague en mettant en exergue l'influence des macro-rugosités. Ce travail vise à analyser l'influence de ces éléments sur les déferlements. Notre principal objectif est de comprendre comment ces éléments de rugosités auront une incidence sur la dynamique du déferlement, de l'emplacement du point de déferlement, de la dissipation d'énergie et l'évolution de l'amplitude de la crête de la vague. Le domaine de calcul est de $25m$ de long et $2.5m$ de hauteur avec une pente d'équation $B(x,y,z)=(x-5.225)/15$ à partir de $x=5.225m$. Les conditions aux limites et initiales sont illustrées sur la figure Fig.7.14. L'amplitude de la vague est $A=0,6m$. Une condition de miroir est imposée sur les côtés latéraux et une pression atmosphérique en haut du domaine de calcul. Le maillage hexaédrique est régulier ($3124 \times 313 \times 1$). La vague est propagée sur $4s$.

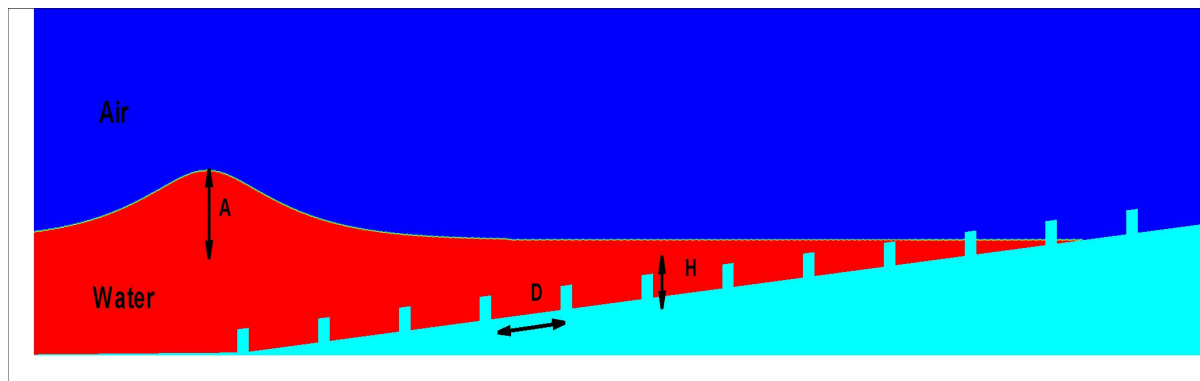


Fig.7.14: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Conditions initiales et géométrie

7.2.1 Description des différents cas tests

On dispose un ensemble de six simulations numériques, voir le tableau Tab.7.1. Ces six cas appelés H00D00, H01D04, H02D04, H03D04, H02D08 et H02D12 sont effectués pour comprendre comment la présence des éléments de macro-rugosités (ci-après notées MR) peuvent affecter le processus de déferlement d'onde. Rappelons que, par éléments MR, nous faisons référence aux formes d'obstacles qui s'étendent loin au-dessus de la couche limite sur le fond plat et supposées produire des accélérations et des décélérations dans le champ de l'écoulement jusqu'à la surface libre. Le cas de référence H00D00 est le cas sans macro-rugosités avec une pente $1/15$ à fond plat présenté dans [Sambe *et al.*, 2011a].

Cinq cas avec fond rugueux sont ensuite simulés afin d'analyser les modifications de la dynamique du déferlement et de comprendre l'influence des éléments MR sur les paramètres physiques. La hauteur et la distance de séparation de ces éléments de rugosité qui sont rectangulaires avec une largeur de 0.2m sont présentées dans le tableau Tab.7.1.

Nom des Cas	A (hauteur du soliton en mètre)	H (hauteur des rugosités en mètre)	D (distance entre les rugosités en mètre)
H00D00	0.6m	Pas de rugosités	Pas de rugosités
H01D04	0.6m	0.1m	0.4m
H02D04	0.6m	0.2m	0.4m
H02D08	0.6m	0.2m	0.8m
H02D12	0.6m	0.2m	1.2m
H03D04	0.6m	0.3m	0.4m

Tab.7.1: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Description des cas tests

7.2.2 Resultats avec une pente lisse

La simulation concerne le déferlement d'une vague solitaire sur une pente lisse (cas H00D00). Ce cas est utilisé ci-après comme le cas de référence pour l'étude de l'influence des macro-rugosités. On présente ci-dessous les résultats de cette simulation avec les champs de densité, de vorticité horizontale et le profil de la surface libre.

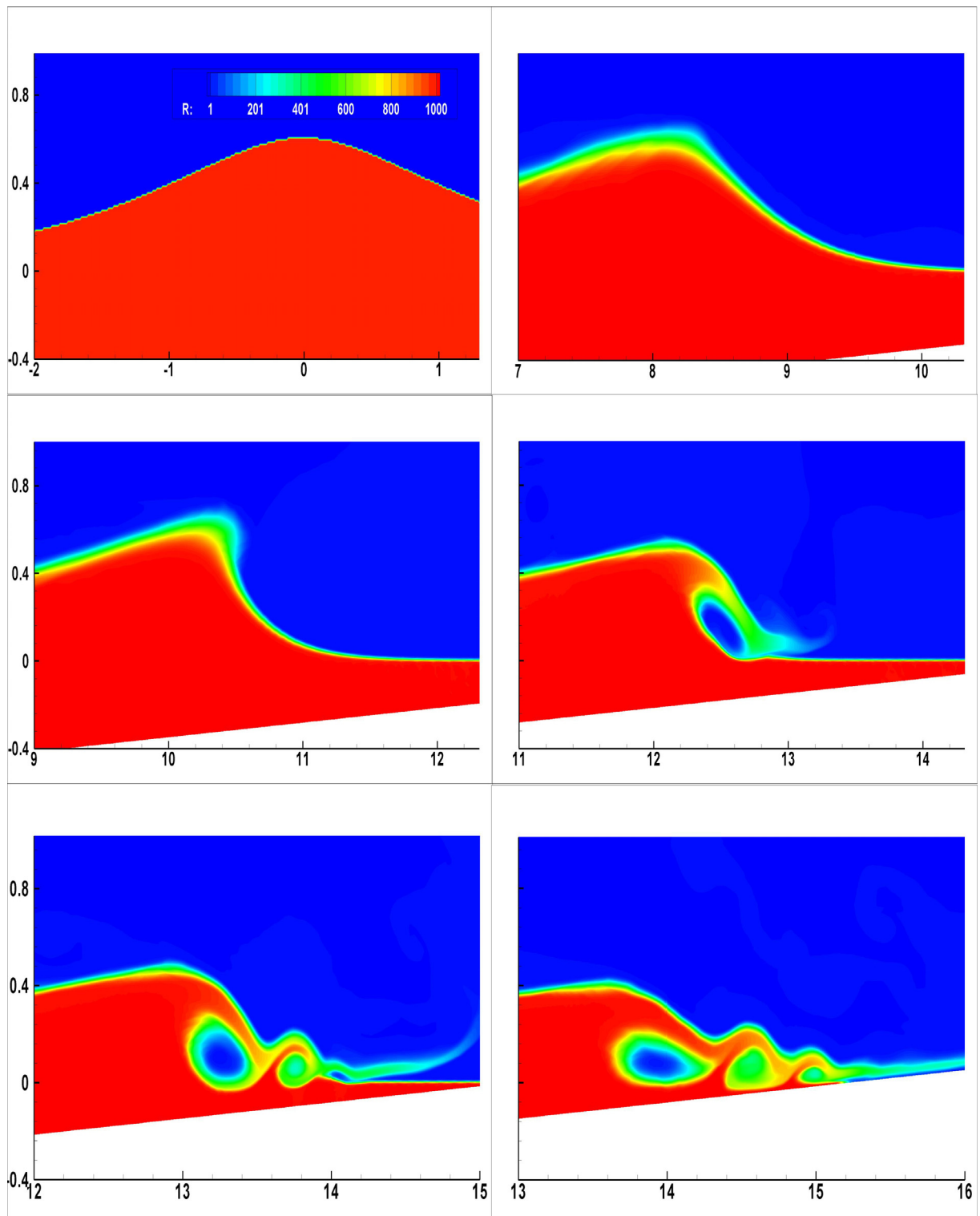


Fig.7.15: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Densité dans le Cas H00D00 à $t=0s, 2.0s, 2.5s, 3.0s, 3.25s, 3.5s$.

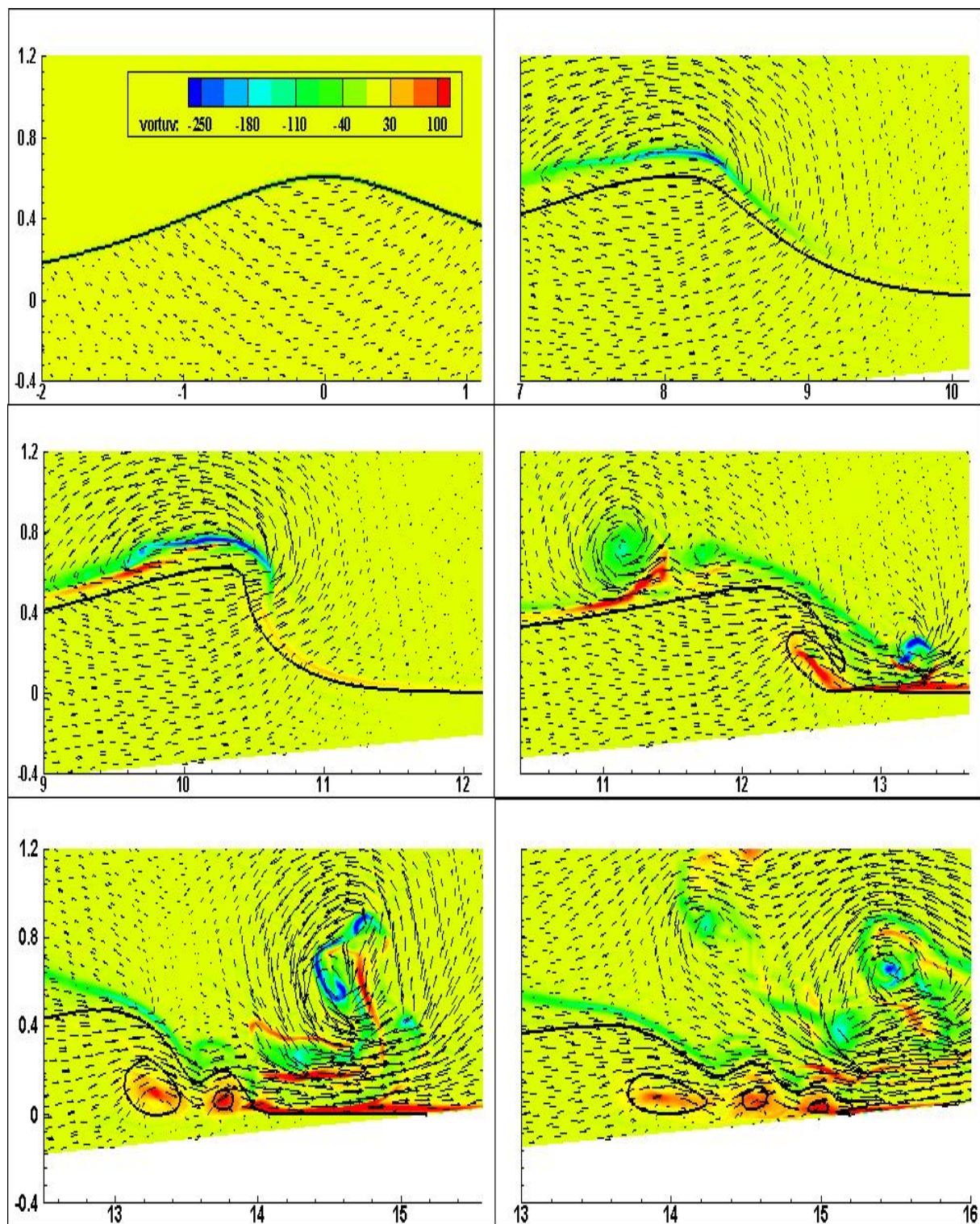


Fig.7.16: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Vorticité horizontale dans le cas H00D00 à $t=0s, 2.s, 2.25s, 3s, 3.25s, 3.s$ et profil de la surface libre

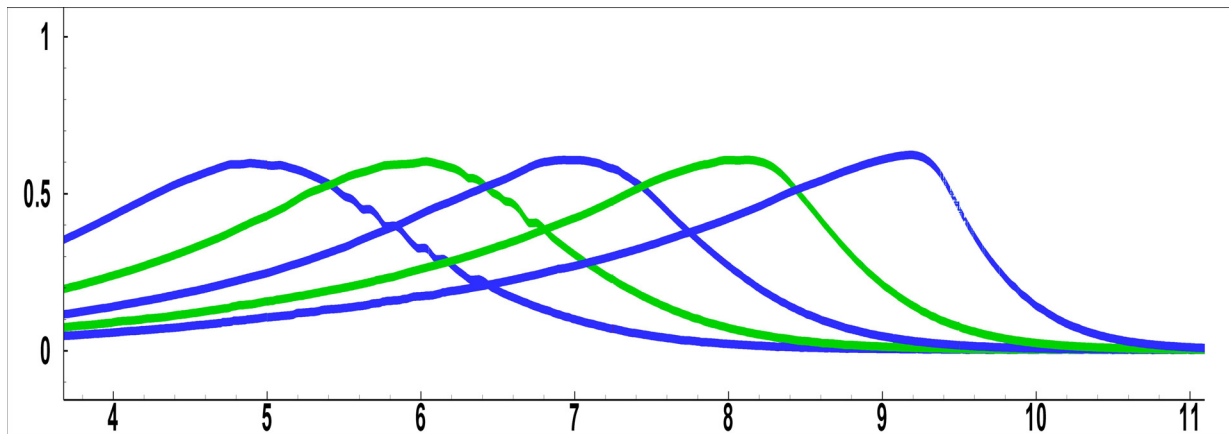


Fig.7.17: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Surface libre $\phi = 0.5$ dans le cas H00D00 à $t = 1.25s, 1.5s, 1.75s, 2.0s, 2.25s$.

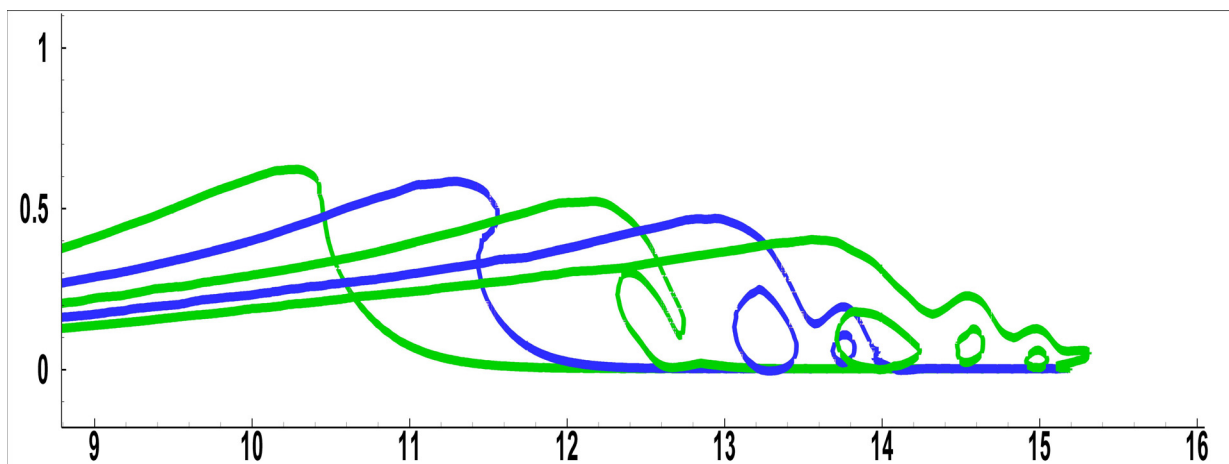


Fig.7.18: Déferlement de vague 2D avec une pente lisse: Surface libre $\phi = 0.5$ dans le cas H00D00 à $t = 2.5s, 2.75s, 3.0s, 3.25s, 3.5s$.

La figure Fig.7.15 présente la densité des deux fluides lors du processus de déferlement. Dans un premier temps l'onde se propage sans déformation, puis, vers $t = 2s$, la vague augmente en amplitude, se raidit progressivement et devient de plus en plus asymétrique au cours de sa propagation. Après $t = 2.5s$, la face avant de la crête devient presque verticale, et on démarre le processus de déferlement et la conversion de l'énergie potentielle en énergie cinétique. Un jet de fluide est éjecté de la crête de la vague.

Le splash-up se développe lorsque le jet rebondit sur la surface libre et sans doute à cause de la hausse sous-jacente d'eau auparavant non perturbées [Lubin *et al.*, 2006]. Le mouvement de renversement se répète deux fois et on observe que chaque cycle de la réaction d'éjection/impact/splash-up devient de plus en plus faible. Des poches de gaz sont piégées. En observant l'épaisseur de l'interface, hors rebond, on remarque que la diffusion numérique est faible.

La figure Fig.7.16 représente la vorticité à différents instants. Au cours de la propagation de l'onde [0.0s; 3.5s], une fine épaisseur de vorticité négative est observée sur la surface libre supérieure. Pendant la phase d'éjection et de chute du jet, la vorticité à l'interface s'intensifie. A l'impact des jets primaire et secondaire, la vorticité s'organise en grandes structures tourbillonnaires, ce qui révèle de la nature tourbillonnaire du processus de déferlement. Vers le bas, les processus successifs du splash-up sont indiqués par trois zones de tourbillon positif.

Cela correspond au développement de tourbillons co-rotatifs dans les trois poches d'air observées sur la figure Fig.7.15 comme indiqué par Miller [Miller, 1976] ou par Sakai et al. [Sakai *et al.*, 1986]. Les figures Fig.7.17 et Fig.7.18 présentent l'évolution du profil de la surface libre au cours de la propagation et du déferlement de la vague. Elles confirment les éléments exposés ci-dessus: le progressif raidissement de la vague, le jet d'éjection de la crête et le rebond sur la surface libre précédemment non perturbée et les trois cycles de splash-up. Les caractéristiques générales du déferlement obtenu sont en bon accord avec les résultats présentés dans la littérature (par exemple [Christensen 2006], [Lubin *et al.*, 2006]). La validation pour ce cas complexe de déferlement exigera des expériences de haute résolution. Cependant, ces résultats numériques peuvent être qualitativement comparés avec l'étude numérique existante [Lubin *et al.*, 2006] ou des expériences [Kimmoun et Branger, 2007].

7.2.3 Influence des macros rugosités sur le déferlement de vague

7.2.3.1 Comparaison entre les cas avec ou sans macro-rugosités

Dans cette section, nous présentons les résultats sur fond incliné couvert par des éléments de macro-rugosités (Tab.7.1) et nous y analysons, leur influence sur le déferlement. Les conditions initiales et les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas précédent, sauf pour le fond. Pour comprendre l'effet de ces éléments MR, nous allons comparer le cas de référence H00D00 avec le cas rugueux intermédiaire H02D08.

7.2.3.1.1 Dynamique du déferlement

L'évolution de la surface de l'eau au cours de la propagation de la vague et du déferlement est présentée sur la figure Fig.7.19. On remarque immédiatement la forte influence du fond rugueux qui provoque le ralentissement de l'onde, une modification de la morphologie du déferlement, l'avancée du point de déferlement ainsi qu'une diminution de l'amplitude de l'onde. Le point de déferlement apparaît plus tôt dans le temps et dans l'espace. La propagation et le gonflement de l'onde incidente sont rapidement affectés par la présence d'éléments MR sur le fond. Cette présence d'éléments MR affecte le profil de la surface libre pendant la phase de shoaling, c'est à dire avant même le déferlement.

La surface libre est perturbée par de petites oscillations de quelques centimètres d'amplitude. L'origine de ces bosses sera expliquée plus tard. A $t = 2.5s$, le jet est proche de l'impact pour le cas avec des éléments MR tandis que le cas de référence n'a pas encore atteint sa pente critique de déferlement. Les phases de shoaling et du déferlement sont accélérées sur le fond dans le cas rugueux. Avant l'impact, le mécanisme du mouvement de renversement de l'onde est très similaire pour les deux cas, voir H00D00 pour $t = 3s$ et H02D08 pour $t = 2.5s$.

Lorsque le jet d'eau éjecté impacte la surface libre auparavant non perturbée, la dynamique du déferlement est fortement affectée par la présence d'éléments MR. Ceci peut se voir clairement sur les figures Fig.7.15 et Fig.7.20 qui comparent l'évolution des contours de densité des fluides lors du processus du déferlement dans les deux cas. Le déferlement se produit beaucoup plus tôt dans le cas avec rugosités.

7.2.3.1.2 Champs de vorticité

On peut voir en comparant les figures Fig.7.16 et Fig.7.21 qui présentent les champs de vorticité, qu'une dynamique se développe entre les éléments de rugosité due à la traînée de forme. Cela a tendance à provoquer le développement d'une couche de vitesse quasi-nulle autour de la face supérieure des macro-rugosités. Ceci est compensé par un excès de quantité

de mouvement apportée par la vague et est confiné dans la partie supérieure de celle-ci. L'augmentation de la vitesse horizontale qui en résulte accélère le processus de déferlement et rapproche ainsi le point de déferlement. Ce phénomène explique la différence d'amplitude de l'onde dans les deux cas et est illustrée sur la figure Fig.7.19. Par ailleurs, comme l'onde se propage encore pendant le processus de déferlement, le mouvement de renversement et les cycles successifs de l'éjection du jet/splash-up/rebonds sont fortement altérées par la présence des éléments MR. La dynamique du splash-up dépend de l'emplacement de ces derniers sur la pente. Elle est soit renforcée en rencontrant les éléments MR (Fig.7.20, $t=3s$) ou éventuellement affaibli par l'impact dans les eaux profondes. L'origine des bosses observées sur la surface libre est clarifiée par la comparaison des champs de vorticité au niveau des figures Fig.7.16 et Fig.7.21 pour les cas plat et rugueux.

En regardant au voisinage des éléments MR pour le cas rugueux (Fig.7.16 et Fig.7.21 pour des temps supérieurs à 2s), la présence d'une couche de vorticité autour de chaque élément MR liée à la présence d'une zone cisailée peut être identifiée. Ce phénomène affecte l'écoulement jusqu'à la surface libre et finit par affecter ainsi la structure de la couche cisailée sur la surface libre, comme le montrent par exemple les figures Fig.7.16 et Fig.7.21 pour $t=2s$. Ceci explique les perturbations de la surface libre notées dans le cas rugueux (Fig.7.19). Pour des temps supérieurs à 2s, la vorticité générée est beaucoup plus importante et est irrégulière pour le cas H02H08, en particulier dans la phase de l'air au voisinage du jet d'eau.

Des tests ont montré qu'en diminuant la hauteur du domaine de calcul, le confinement de la couche d'air perturbe le déferlement [Sinilo, 2007]. L'extension verticale du domaine de calcul a alors été choisie pour avoir un compromis satisfaisant entre temps CPU et pertinence physique. Cependant, cet effet parasite est limité à l'écoulement de l'air, ce qui peut éventuellement augmenter la diffusion de l'interface. On n'observe pas une influence significative de ce phénomène sur la dynamique de l'eau pendant le processus de déferlement de la vague.

7.2.3.1.3 Conclusion

A ce stade, on peut désormais et déjà conclure sur l'influence des éléments de macro-rugosités sur la dynamique du déferlement. Cette influence, par exemple pour le cas présenté H02D08, peut être résumée comme suit:

- ⇒ Une avancée du point de déferlement
- ⇒ Des déformations importantes autour des macro-rugosités jusqu'à la surface libre
- ⇒ Une forte perturbation des cycles successifs de l'impact/splash-up/rebonds
- ⇒ Une éventuelle diminution de la distance du "run-up".

La compréhension détaillée du déferlement en présence de macro-rugosités ne saurait être basée sur la description d'un seul cas de simulation. Une étude paramétrique est nécessaire afin de comprendre l'influence de la géométrie et de la densité des éléments de rugosités et ainsi fournir une analyse des processus physiques en jeu. Ce travail est fait dans le paragraphe suivant.

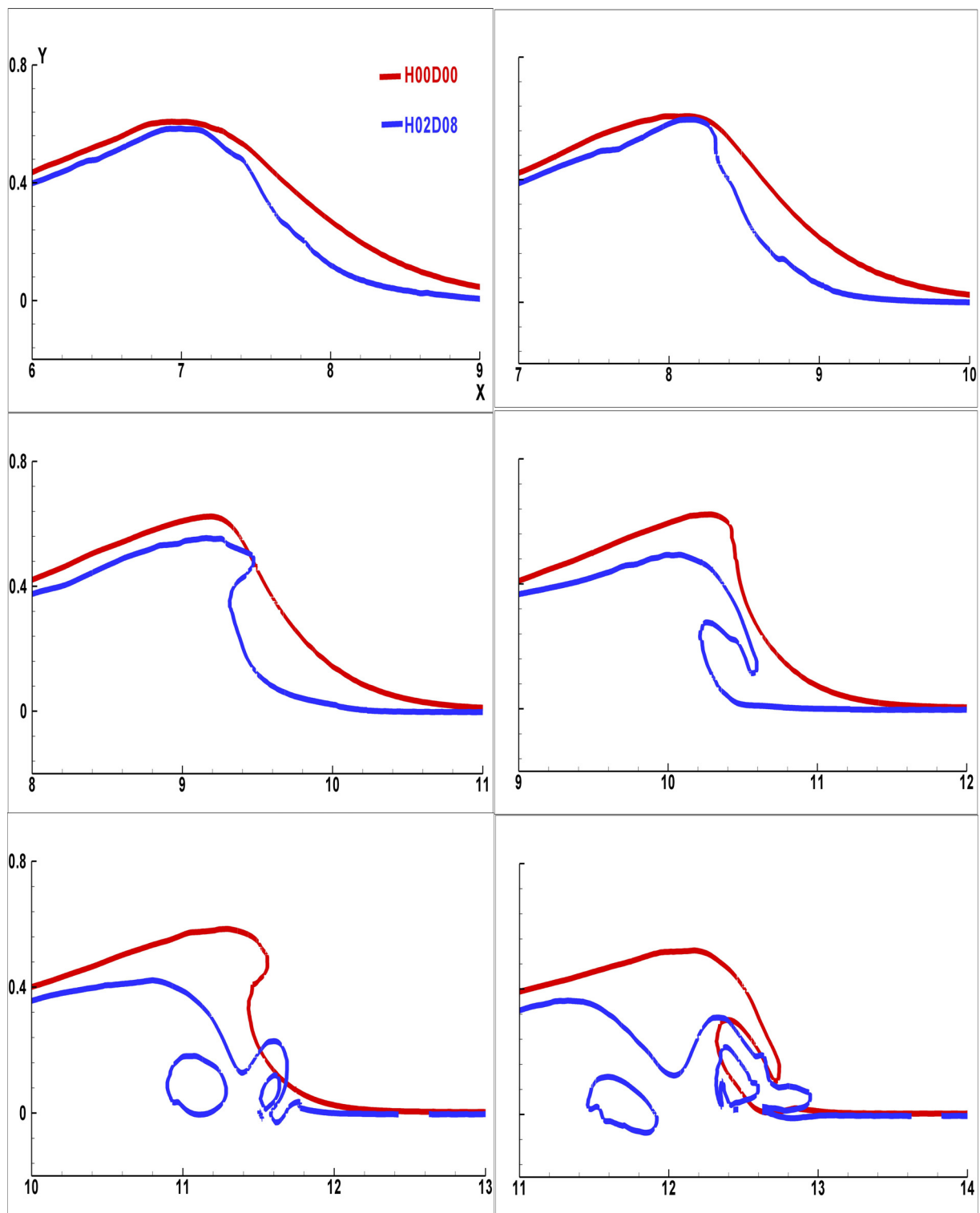


Fig.7.19: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Surface libre. Comparaison entre les cas H00D00 et H02D08 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.0s$.

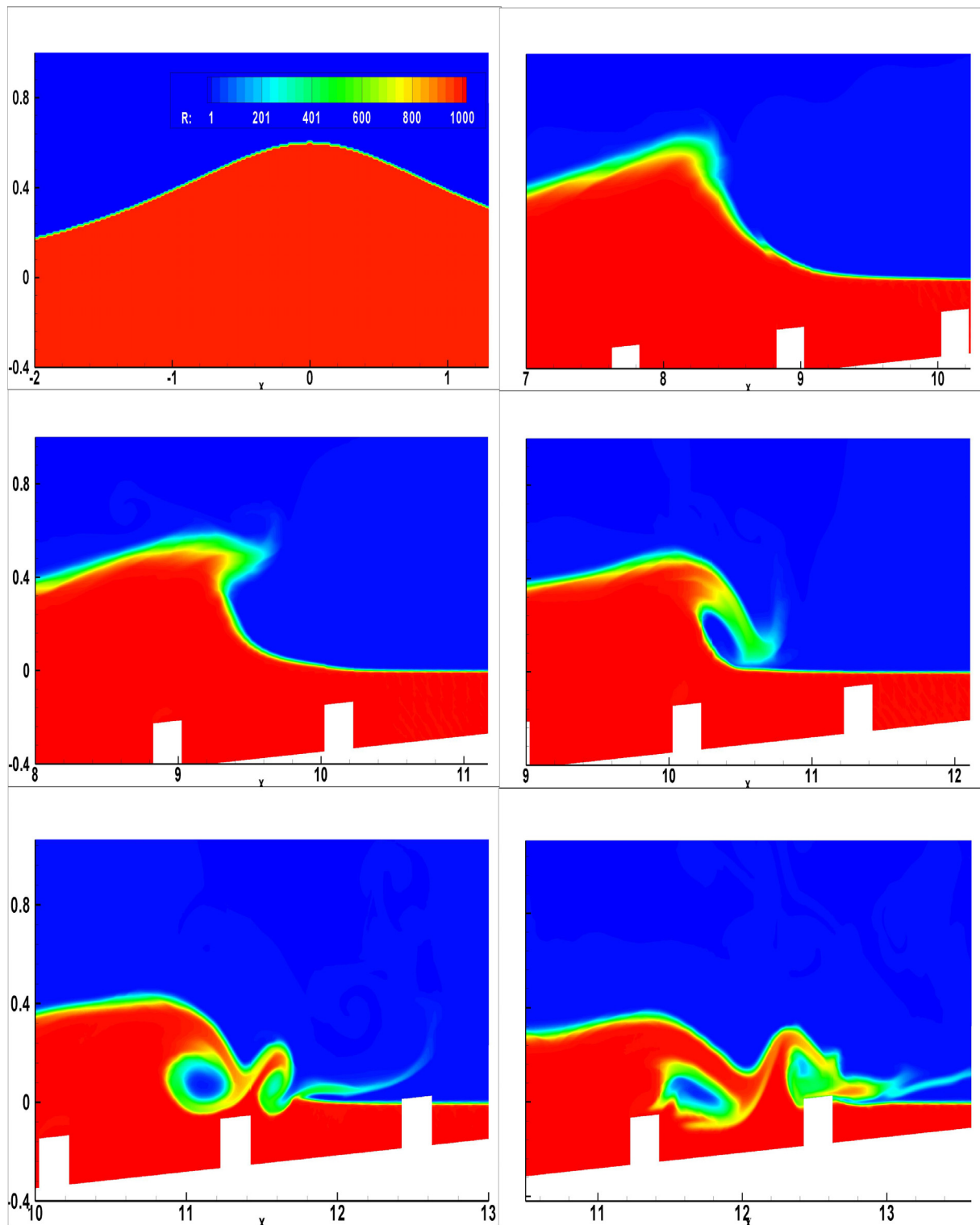


Fig.7.20: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H02D08 à $t=0s$, $2.0s$, $2.25s$, $2.5s$, $2.75s$, $3.0s$.

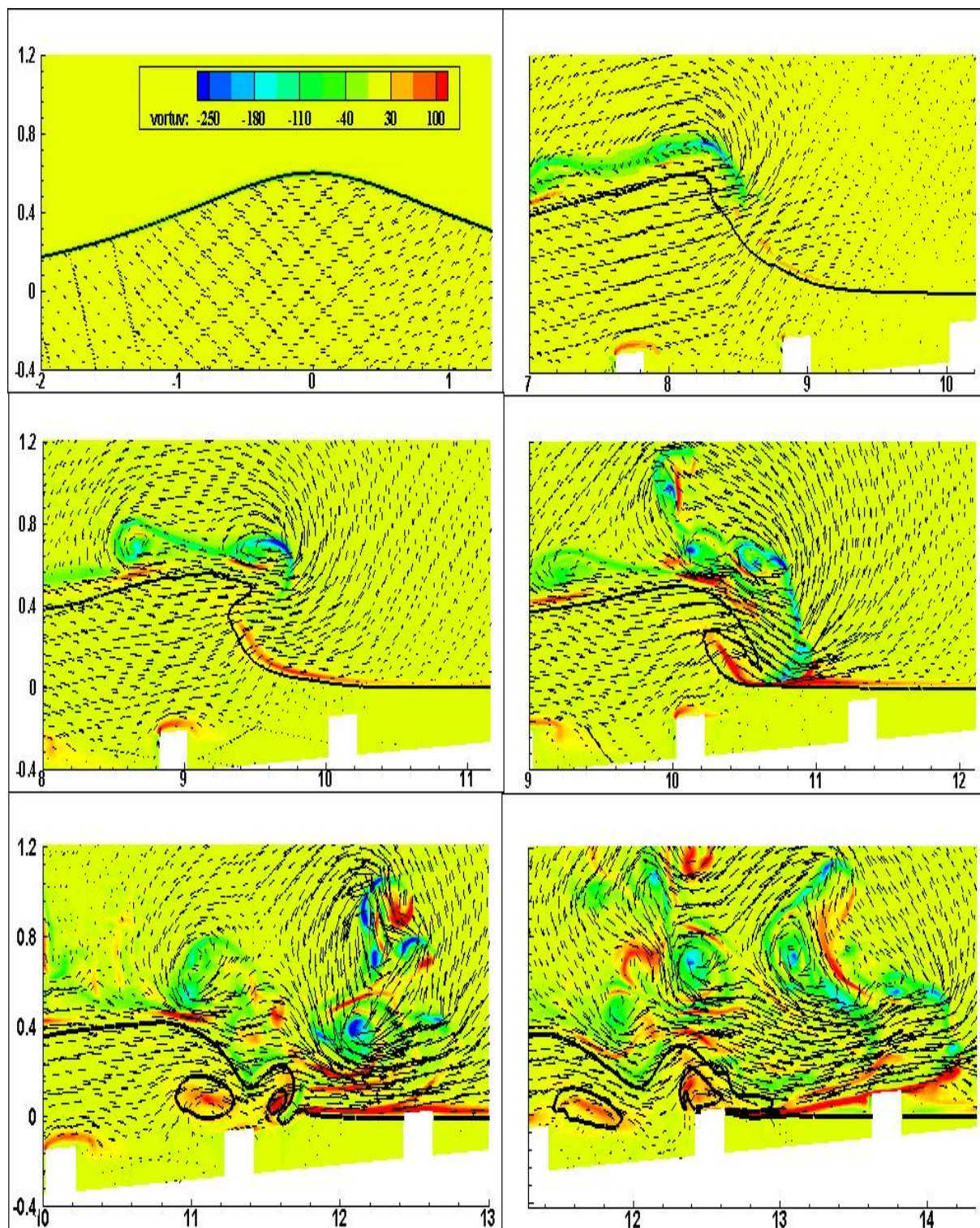


Fig.7.21: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Vorticité horizontale dans le cas H02D08 à $t=0s$, $2s$, $2.25s$, $2.5s$, $2.75s$, $3s$ et profil de la surface libre

7.2.3.2 Etude paramétrique

7.2.3.2.1 Influence de la distance de séparation des macro-rugosités

L'étude paramétrique sur les six cas présentés dans le tableau Tab.7.1 a montré le rôle important du paramètre D qui est la distance de séparation des éléments de MR. Cela est mis en évidence par la comparaison des profils de la surface libre présentée sur la figure Fig.7.22. On peut noter d'abord que l'emplacement du point de déferlement ainsi que le moment du mouvement de renversement de la vague et de l'impact du jet ne sont que faiblement affectés pour des D variables. La comparaison des profils de la surface libre pendant la phase de shoaling et du mouvement de renversement de la vague montre que les perturbations de la surface libre observées précédemment et attribuées aux modifications de la morphologie de l'écoulement par les éléments MR sont renforcées pour des D grandes (cas H02D12) et amortie pour des D petites (cas H02D04).

Une forte influence de D est observée pour les étapes ultérieures du processus de déferlement. Pour un D petit (cas H02D04), la dynamique d'ensemble de l'écoulement est assez similaire au cas de référence et les cycles successifs de splash-up sont bien définis au moins pour des temps inférieurs à 3,5s. Pour des distances de séparation grandes, les phases du déferlement sont fortement affectées par la présence des éléments MR (cas H02D08 et H02D12), le déferlement se produit plus tard. Le phénomène qui a tendance à perturber les cycles splash-up, soit par le renforcement ou par l'affaiblissement du processus en fonction de l'emplacement des éléments MR sur le fond de la pente, est renforcé par l'augmentation de D , par exemple dans la figure Fig.7.22 pour $t = 2.75s$ et $t = 3s$.

Une vue rapprochée des champs de vorticité dans le voisinage des éléments MR à $t = 2.25s$ pour les cas H02D04 et H02D08 est présentée sur la figure Fig.7.23. L'effet de la distance de séparation D sur les champs de vorticité est clairement identifié. Pour un petit D (partie haute de la figure Fig.7.23), les éléments MR sont trop proches pour permettre des circulations, induites par la traînée de forme, de pénétrer et de se développer entre eux. Une couche cisailée presque continue est formée au dessus des rugosités et l'effet sur l'écoulement principal est presque comparable à une réduction de la profondeur de l'eau. Cela induit à son tour un t t déferlement par rapport au cas H00D00 comme dans la figure Fig.7.22. Pour des distances de séparation grandes, des tourbillons se développent dans le sillage de chaque élément MR et affectent l'onde de propagation dans tout son domaine.

7.2.3.2.2 Influence de la hauteur des macro-rugosités

Intéressons nous maintenant à une analyse de l'influence de la hauteur H des éléments MR sur la dynamique du déferlement. La figure Fig.7.24 compare les évolutions des profils de la surface libre pour les cas H00D00, H01D04, H02D04 et H03D04. Une tendance observée est que plus H est grand, plus le mouvement de renversement et le raidissement de la vague se produisent très tôt. Pour des temps supérieurs à 2.5s, on peut noter que la variable H joue un rôle prépondérant sur le déferlement. Pour des rugosités suffisamment petites (cas H01D04, Fig.7.25), les cycles du splash-up/rebonds ne sont pas significativement affectés par la présence d'éléments MR. L'augmentation de H induit de fortes perturbations (cas H03D04, Fig.7.26) avec des poches d'air piégées entre les éléments MR.

L'effet des éléments MR sur le processus du déferlement dépend de leur hauteur et de leur distance de séparation par rapport aux paramètres de la vague et de la pente. Pour une analyse de base, les effets de la pente locale, du raidissement de la vague sont négligés. Le point de déferlement est supposé être atteint lorsque l'amplitude de la vague A augmente jusqu'à un pourcentage donné de la profondeur locale, comme proposé par [Lubin *et al.*, 2006].

Notons que pour les grands déferlements plongeant ici étudiés, on s'attend à ce que la valeur critique soit proche de 1 (la profondeur de l'eau). Cela indique simplement qu'au niveau du point de déferlement, l'amplitude de l'onde et la profondeur locale sont liés et peuvent être utilisées comme des paramètres de normalisation pour H et D .

7.2.3.2.3 Analyse adimensionnée

En gardant à l'esprit qu'un plus grand nombre de simulations doit être effectué afin de proposer une étude paramétrique complète, les tendances générales sur l'influence des MR sur le déferlement des ondes solitaires peuvent cependant être déduites des données de la présente étude. L'amplitude du soliton $A = 0.6\text{m}$ est utilisée ici comme le paramètre de normalisation. L'influence de la distance de séparation des éléments MR est alors conditionnée par le rapport adimensionnel D/A . D'une part, pour $D/A < 1$, aucun mouvement de circulation ne se développe entre les éléments MR et l'effet sur l'écoulement principal est presque comparable à une réduction de la profondeur d'eau induisant ainsi un déferlement tôt.

D'une autre part, lorsque $D/A > 1$, un mouvement tourbillonnaire se développe dans le sillage de chaque élément MR affectant toute la colonne du fluide et perturbe la surface libre. En outre, les cycles successifs de l'impact/splash-up/rebonds sont fortement affaiblis avec l'éjection d'une masse d'eau lorsque le fluide rencontre les éléments MR, et la distance du "run-up" est supposée diminuer.

L'influence de la hauteur des macro-rugosités dépend du rapport adimensionnel H/A . Pour $H/A < 0.25$, le seul effet du MR est d'induire tôt le déferlement de l'onde. Lorsque $H/A > 0.25$, la dynamique globale du déferlement est modifiée avec de fortes perturbations des cycles de splash-up. De grandes poches d'air sont piégées entre les éléments de rugosité.

Le rôle joué par l'emprisonnement de l'air sur le processus du déferlement des vagues n'est pas évident. Cependant, des observations intéressantes peuvent être faites en comparant les cas H01D04 et H03D04 illustrées sur les figures Fig.7.25 et Fig.7.26. Pour le cas des rugosités de petites tailles (H01D04), la couche de liquide est trop peu profonde et les MR sont trop petits pour permettre l'entraînement de poches de gaz significatives entre les éléments MR. Pour des hauteurs des éléments MR suffisamment élevées (H03D04), des poches d'air générées par les cycles splash-up/rebonds peuvent être coincées entre les éléments MR, comme on peut le voir pour $t = 2.75\text{s}$ et $t = 3\text{s}$.

La présence des poches d'air tend à éviter les rebonds de jet. Ceci peut être observé en comparant le premier cycle du splash-up ($t = 2.25\text{s}$ et $t = 2.5\text{s}$) pour lequel le jet impacte et rebondit sur l'eau et le second cycle ($t = 2.5\text{s}$ et $t = 2.75\text{s}$) où le jet impacte de près une poche de gaz et le rebond est entravé. La séquence des cycles de l'impact/splash-up/rebonds est donc rompue et on a un effondrement d'onde, produisant une sorte de langue oscillant glissant sur le haut des éléments MR (voir Fig.7.26 pour $t = 3\text{s}$).

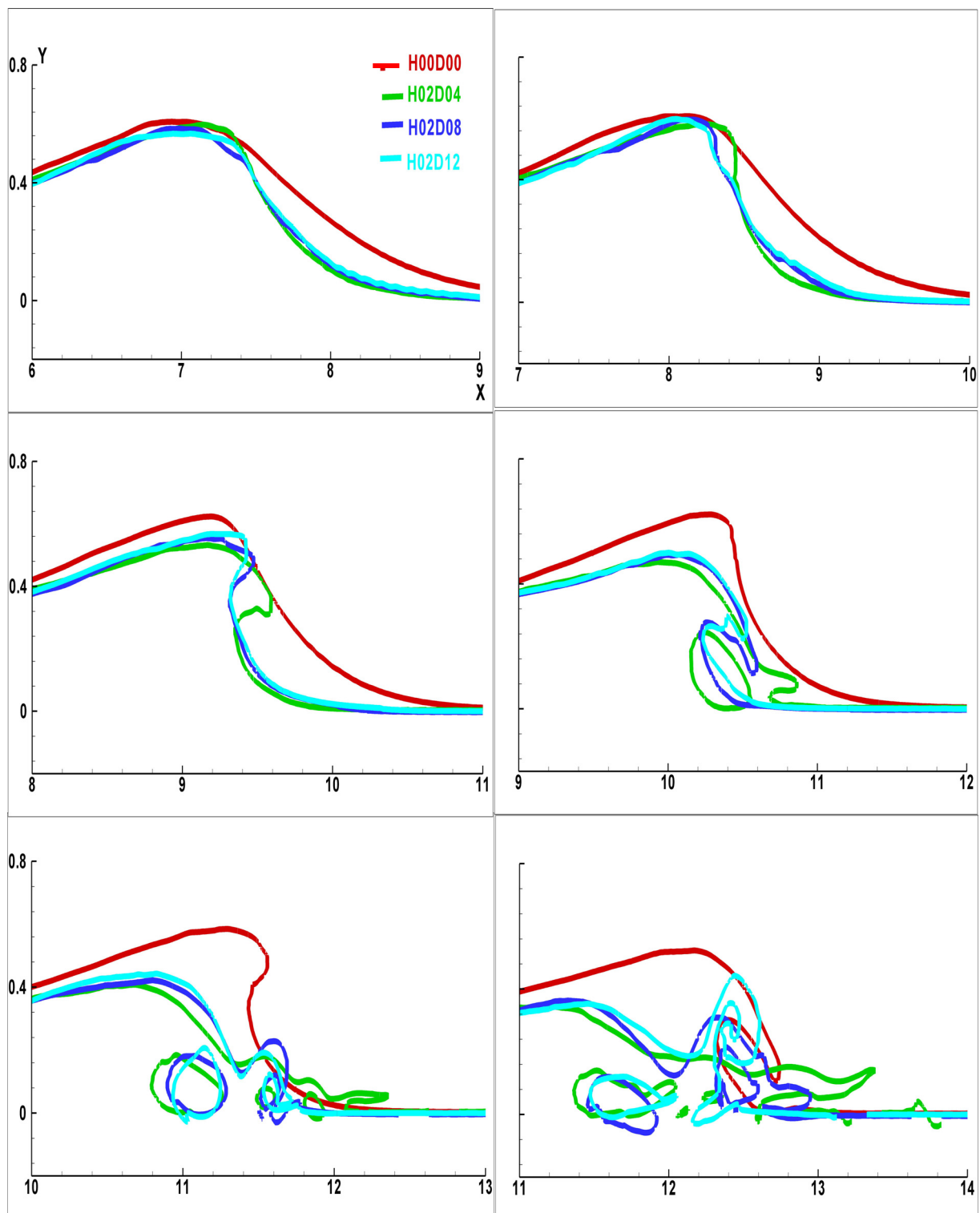


Fig.7.22: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la distance entre les éléments de macro-rugosités: Surface libre $\phi = 0.5$. Comparaison entre les cas H00D00, H02D04, H02D08, H02D08 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.0s$.

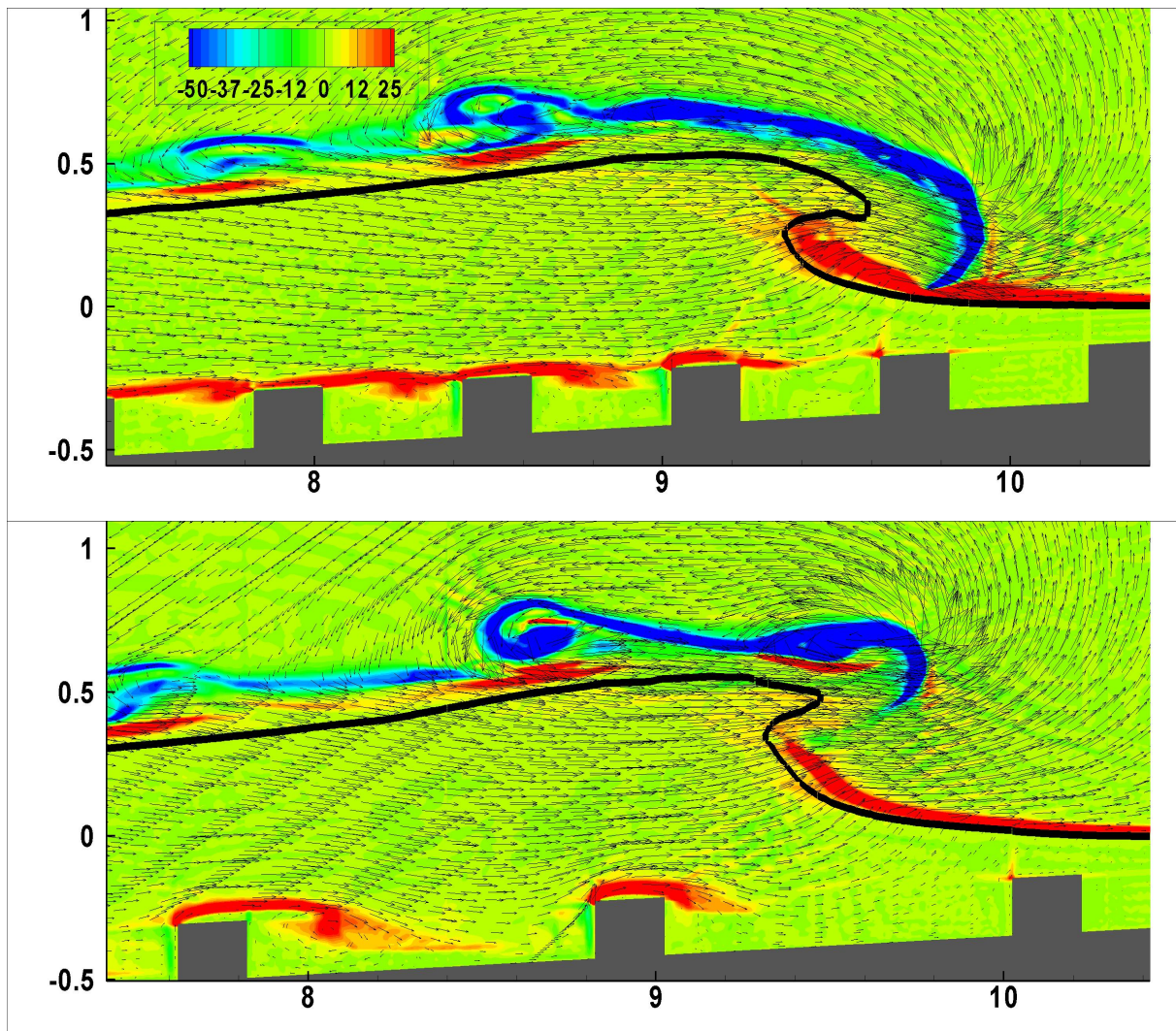


Fig.7.23: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la distance entre les éléments de macro-rugosités: Vorticité horizontale. Comparaison entre les cas H02D04 (haut) et H02D08 (bas) à $t=2.25s$ et profil de la surface libre

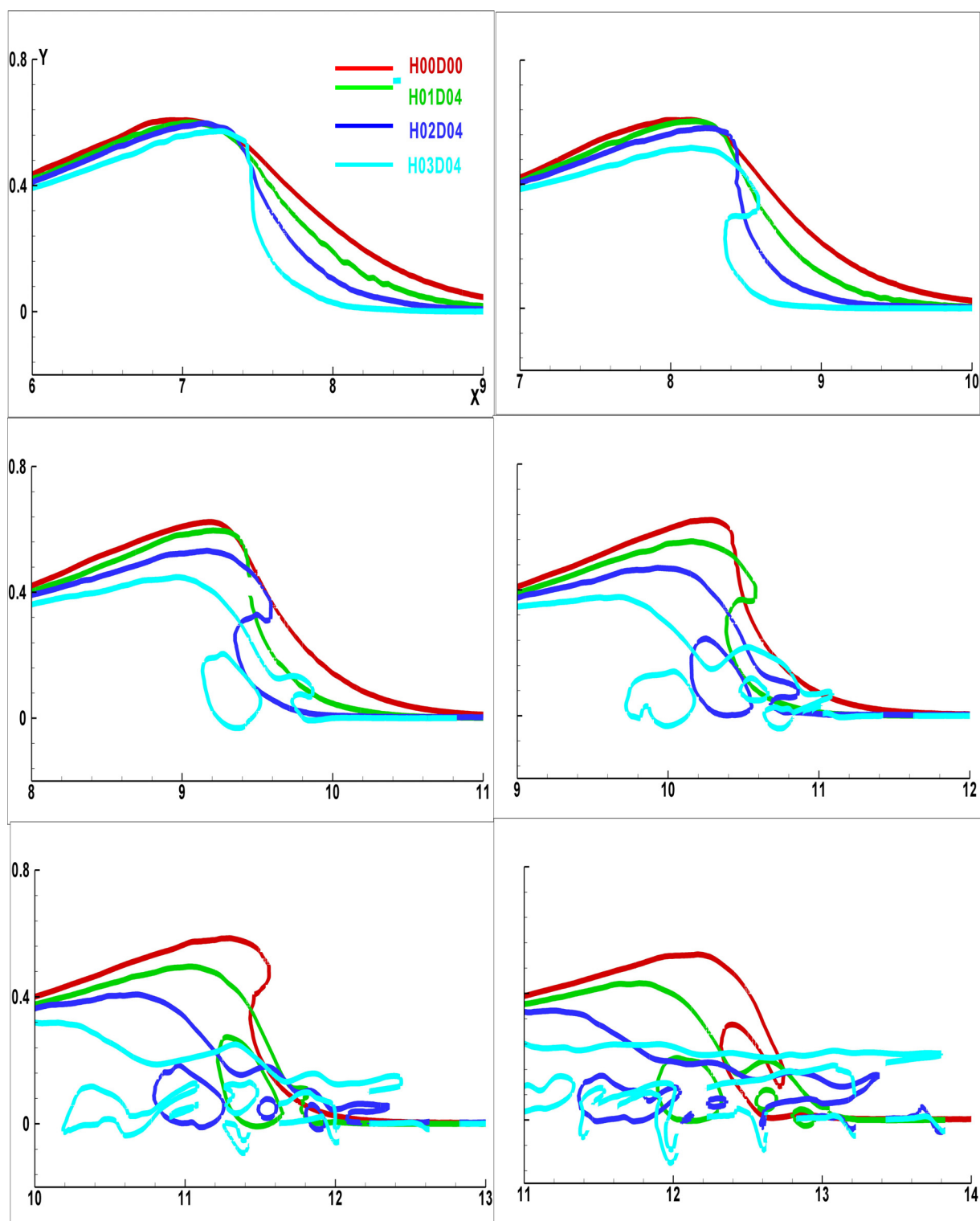


Fig.7.24: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Influence de la hauteur des éléments de macro-rugosités: Surface libre $\phi = 0.5$. Comparaison entre les cas H00D00, H01D04, H02D04, H03D04 à $t=1.75s, 2.0s, 2.25s, 2.5s, 2.75s, 3.0s$.

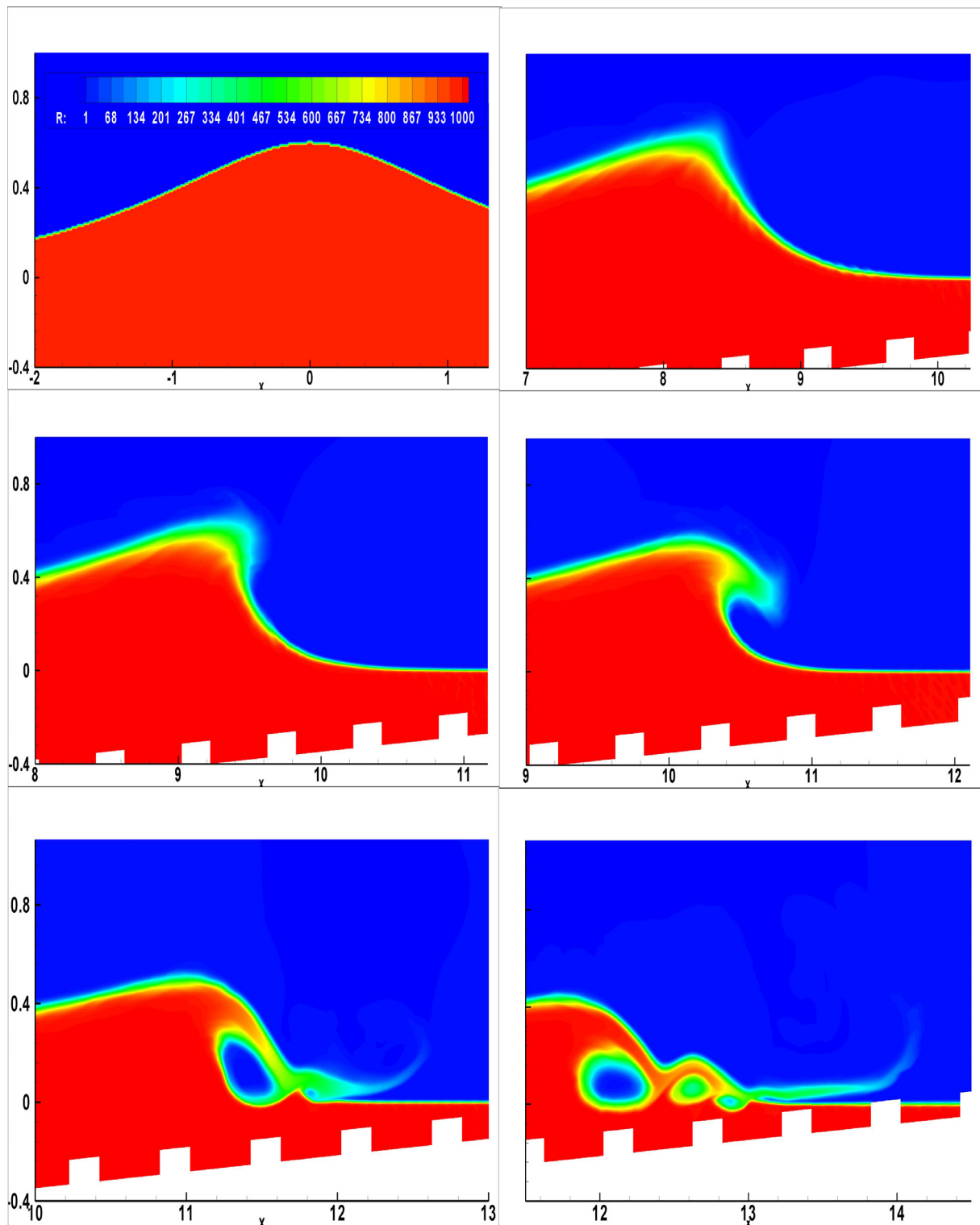


Fig.7.25: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H01D04 à $t=0s$, $2.0s$, $2.25s$, $2.5s$, $2.75s$, $3.0s$.

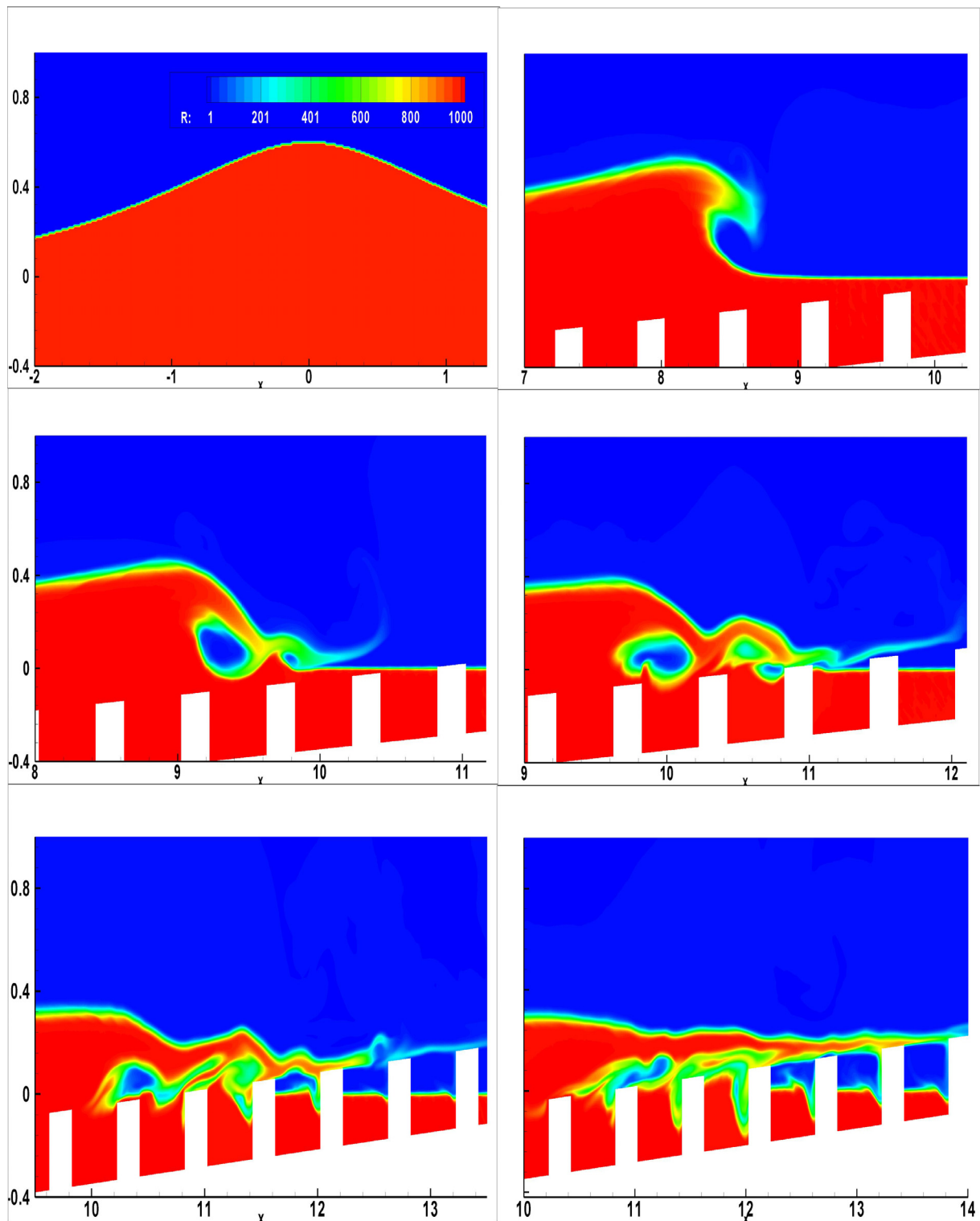


Fig.7.26: Déferlement de vague 2D avec rugosités: Densité dans le Cas H03D04 à $t=0s$, $2.0s$, $2.25s$, $2.5s$, $2.75s$, $3.0s$.

7.2.4 Conclusion

Dans cette partie, des simulations numériques de déferlement d'onde solitaire ont été effectuées résolvant les équations d'Euler pour un modèle bi-fluide basé sur un système hyperbolique de lois de conservation. Ce travail publié dans [Sambe *et al.*, 2011b] est une continuité de nos travaux présentés dans [Sambe *et al.*, 2009]. L'objectif physique de l'étude était de comprendre l'influence des macro-rugosités sur les déferlements de vagues et de sa dynamique. La viscosité et la turbulence ne sont pas considérées dans ce modèle. Les cas de simulations sélectionnés correspondent à des cas de déferlements de type plongeant. Comme attendu, la dynamique du déferlement est dominée par les impacts, des chocs de pression et de grandes structures tourbillonnaires plutôt que des frottements sur le fond ou des cascades d'énergies turbulentes. Avec ou sans rugosité, le modèle numérique donne des résultats satisfaisants. Les caractéristiques généralement décrites dans la littérature telles que le mouvement de retournement de l'onde incidente, la phase du splash-up, l'entraînement des poches d'air, la dynamique du déferlement ainsi que la génération de structures tourbillonnaires sont bien reproduites.

L'influence des éléments MR sur l'onde déferlante dépend, d'après ces résultats, de deux paramètres adimensionnels D/A et H/A où D , H et A sont respectivement la distance de séparation entre les éléments MR, la hauteur de ces éléments et l'amplitude de l'onde. Des effets significatifs ont été observés pour de grandes valeurs de D/A et D/A .

Les cycles successifs de l'impact/splash-up/rebonds sont fortement affaiblis et on s'attend à une réduction de la distance du "run-up". D'autres cas de simulations mais aussi des comparaisons issus d'expériences en laboratoire et des mesures de terrain devraient être effectués afin de proposer une étude paramétrique complète à des fins d'ingénierie. Ce travail est une première approche et pourrait être utilisé en hydrodynamique naval sur l'optimisation des paramètres des systèmes de défense.

Pour illustrer l'efficacité du modèle numérique pour simuler des interactions complexes vagues-structures, deux cas tridimensionnels seront traités dans le prochain paragraphe. Il s'agit d'un déferlement 3D de vague sur une pente avec des rugosités et ensuite on traitera le problème d'une rupture de barrage 3D en présence d'obstacle.

7.3 Analyses numériques d'un déferlement 3D de vague en zone côtière

Les validations présentées tout au long de cette thèse offrent une occasion idéale de tester notre modèle numérique sur un problème environnemental à échelle réduite d'un déferlement de vagues (ou d'un tsunami) en zones côtières et offshores. Un aspect important est le choix de la bathymétrie avec plusieurs obstacles superposés dans la direction du soliton. Cette avant dernière partie de nos travaux consiste à analyser le déferlement de vagues en zones côtières.

7.3.1 Description du cas d'étude et des caractéristiques de la simulation

Ce cas tridimensionnel de déferlement de vague en présence des éléments de rugosité a été choisi pour évaluer la capacité du modèle numérique pour simuler les écoulements bi-fluides avec une topographie complexe. La géométrie est une extension 3D du cas 2D avec une largeur de 1m suivant l'axe z . Les éléments MR de hauteur 0,2m, de longueur 0.2m et de largeur 0.1m sont régulièrement espacés de 0.8m (voir Fig.7.27). La durée de la simulation est de 10 secondes. Comme dans le cas 2D, la vitesse du son c_0 est fixée à 20m/s. La méthode de compression d'interface d'ordre 2 est utilisée. Pour le schéma d'intégration en temps, la méthode Adams Bashforth avec l'approche multi-échelle est utilisée.

Le maillage est régulier et fait d'hexaèdres. La simulation en 2D comportait environ 1 million de cellules ($2827 \times 375 \times 1$), avec une largeur de 0.5m, le cas 3D devait comporter environ 50

millions de mailles. Si on optait pour une même discrétisation, cela pourrait coûter beaucoup de temps de calcul. Le maillage choisi est alors plus grossier que dans le cas 2D. Il comporte 9.5 millions de cellules: $1052 \times 180 \times 50$. Pour un temps de simulation de 1s, la simulation nécessite deux jours de temps CPU.

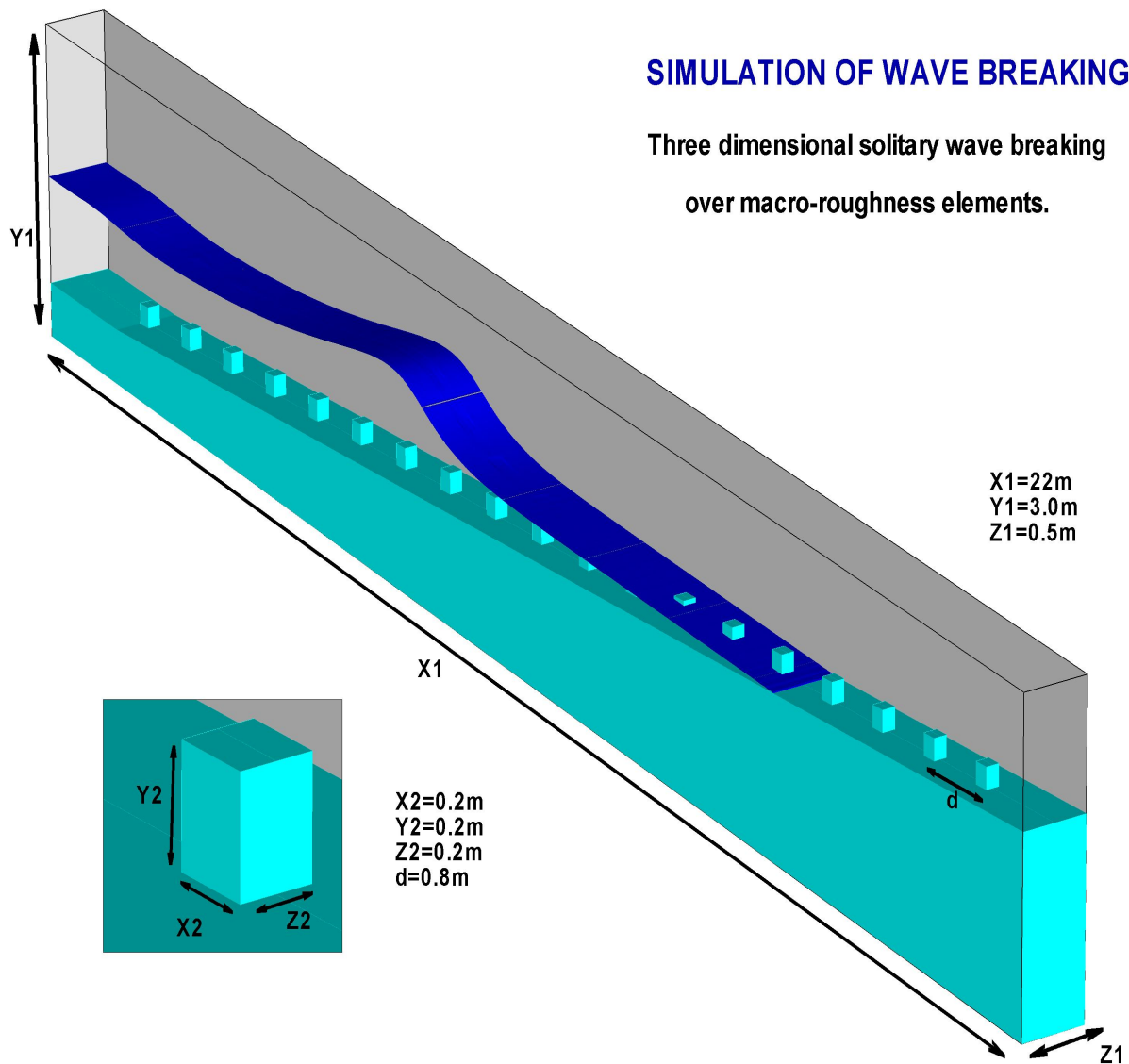


Fig.7.27: Déferlement de vague 3D: Géométrie du domaine

L'initialisation est faite avec un soliton. Étant donné que le problème est symétrique, seule la moitié du domaine est ici considérée et des conditions de symétrie sont imposées à la partie latérale. Des conditions de miroir sur les parois du domaine de calcul suivant l'axe x et en bas du domaine sont imposées, en haut du domaine, on a la pression atmosphérique.

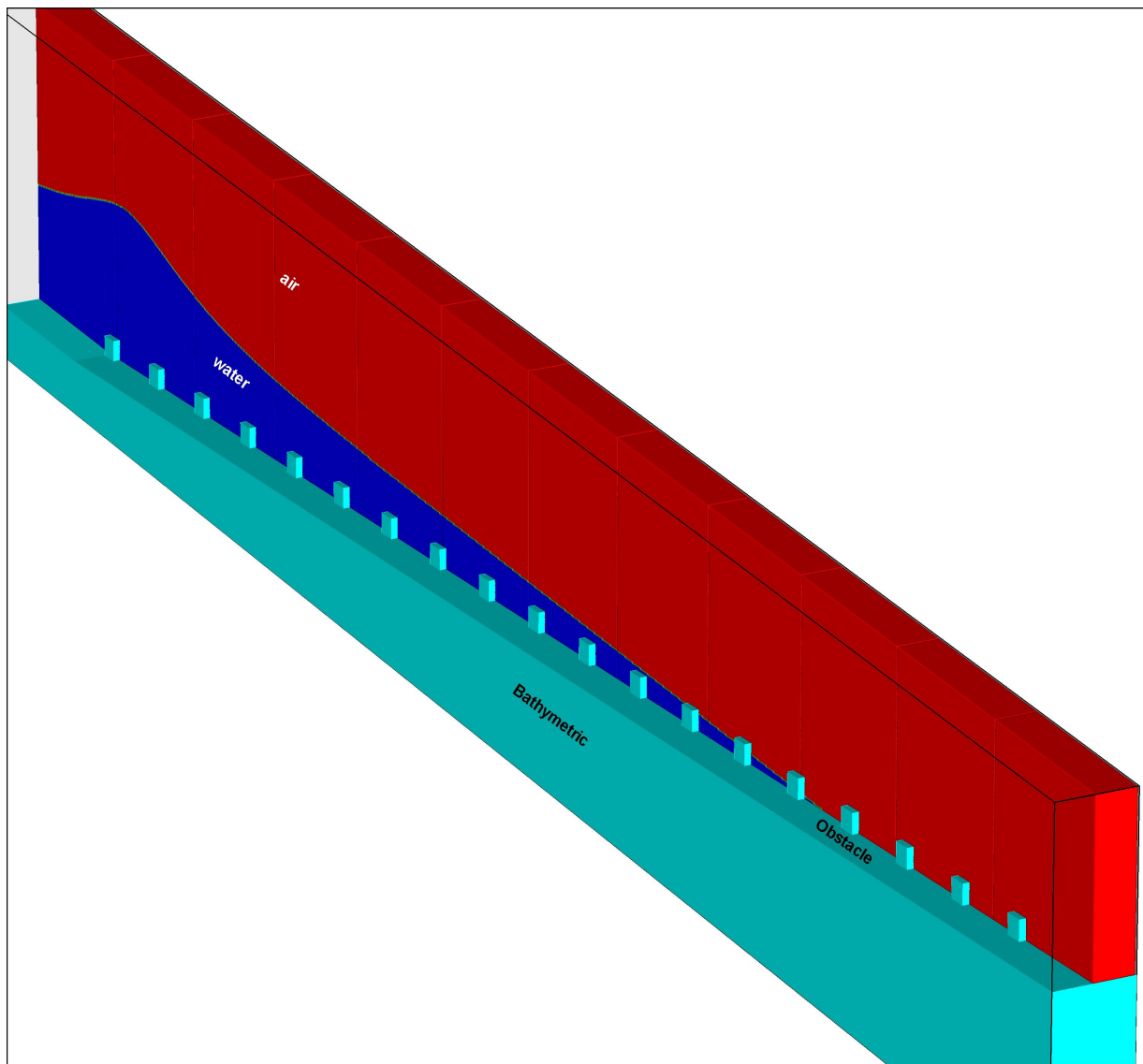


Fig.7.28: Déferlement de vague 3D: Conditions initiales

7.3.2 Résultats numériques

7.3.2.1 Dynamique du déferlement

Les évolutions des isodensités pour différents instants de la simulation sont représentées sur les figures (Fig.7.29 à Fig.7.40). Pour des temps inférieurs à 2.25s, la vague se propage sans déformation. Aux alentours de $t=2.5s$, le point de déferlement est atteint et on démarre le processus de la phase du shoaling. Au début, ce processus est faiblement affecté par la présence des éléments MR, l'onde solitaire reste essentiellement bidimensionnelle. A partir de $t=2.5s$, l'influence des MR devient significative. Les observations réalisées dans le cas 3D sont confirmées: la présence des MR accélère le raidissement, la déstabilisation de la face de l'onde et le processus de retournement. On identifie à $t=3s$ que le jet se développant au dessus des MR impacte plus loin et plus vite que celui généré sur la partie lisse du fond. De $t=3s$ à 3.25s, le mouvement de renversement est accéléré sur le fond des régions couvertes par les éléments MR.

Après l'impact du jet, la tridimensionnalisation du déferlement s'amplifie (Fig.7.35 à Fig.7.37). Sur la partie lisse du fond, le front d'onde se propage progressivement le long de la pente. La moindre résolution du maillage 3D ne permet plus de décrire les cycles de splash-up aussi finement que dans le cas 2D. Sur la partie centrale recouverte de MR, la dynamique s'apparente à celle observée dans le cas 2D, avec là encore une perte probable en résolution due au maillage plus grossier. On peut néanmoins observer que les impacts successifs sur les éléments de MR vont progressivement bloquer la propagation de l'onde dans la partie centrale. Entre $t=4s$ et $4.5s$, on peut constater que la face arrière des MR initialement émergées reste hors de l'eau alors que le "run-up" sur la partie lisse les a déjà largement dépassées. L'eau qui pénètre entre les MR provient d'abord de l'écoulement rapide sur la partie lisse plutôt que des masses d'eau ayant submergé les MR.

Le front d'onde global n'est plus uniforme. On peut s'attendre à la formation de grosses structures tourbillonnaires dues au fort cisaillement à la fois horizontal et vertical. La présente simulation confirme l'efficacité empirique des structures de protection installées aux zones de déferlement. On peut aussi s'attendre à ce qu'une distribution spatiale aléatoire des MR avec des hauteurs différentes générerait une grande variété de structures tourbillonnaires, à la fois en taille et en direction. Elle devrait conduire à des forts transferts de quantité de mouvement et donc à plus de dissipation énergétique de la vague.

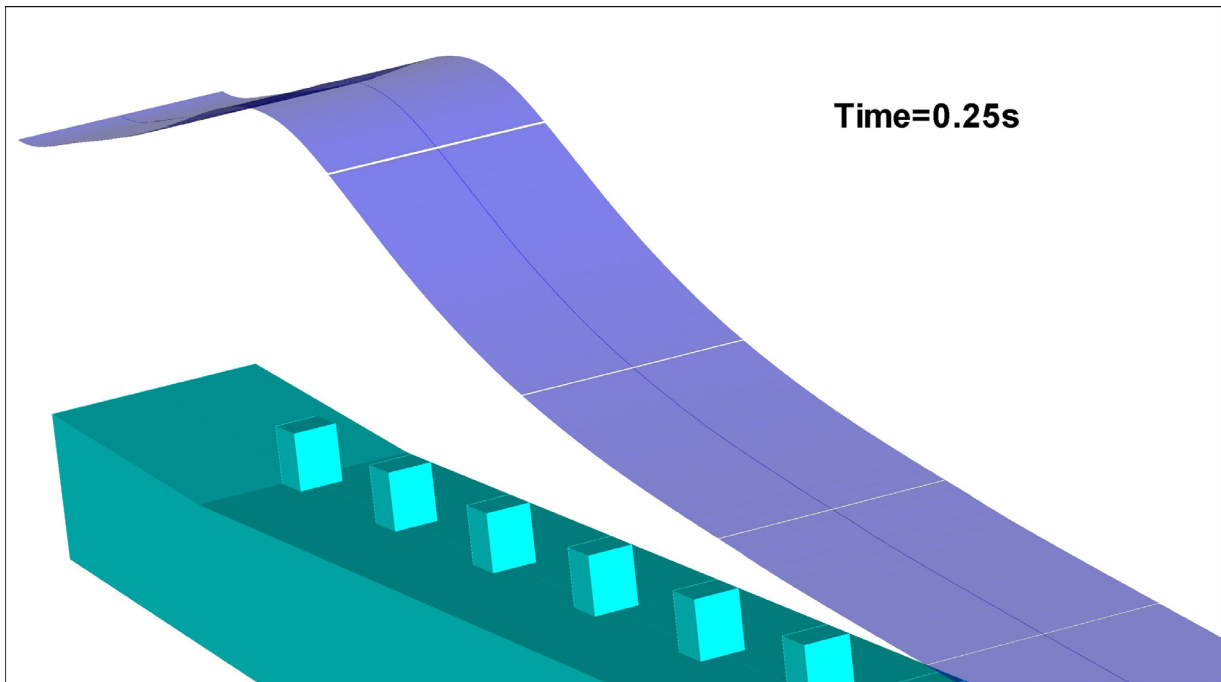


Fig.7.29: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t = 0.25s$. $\phi = 0.5$

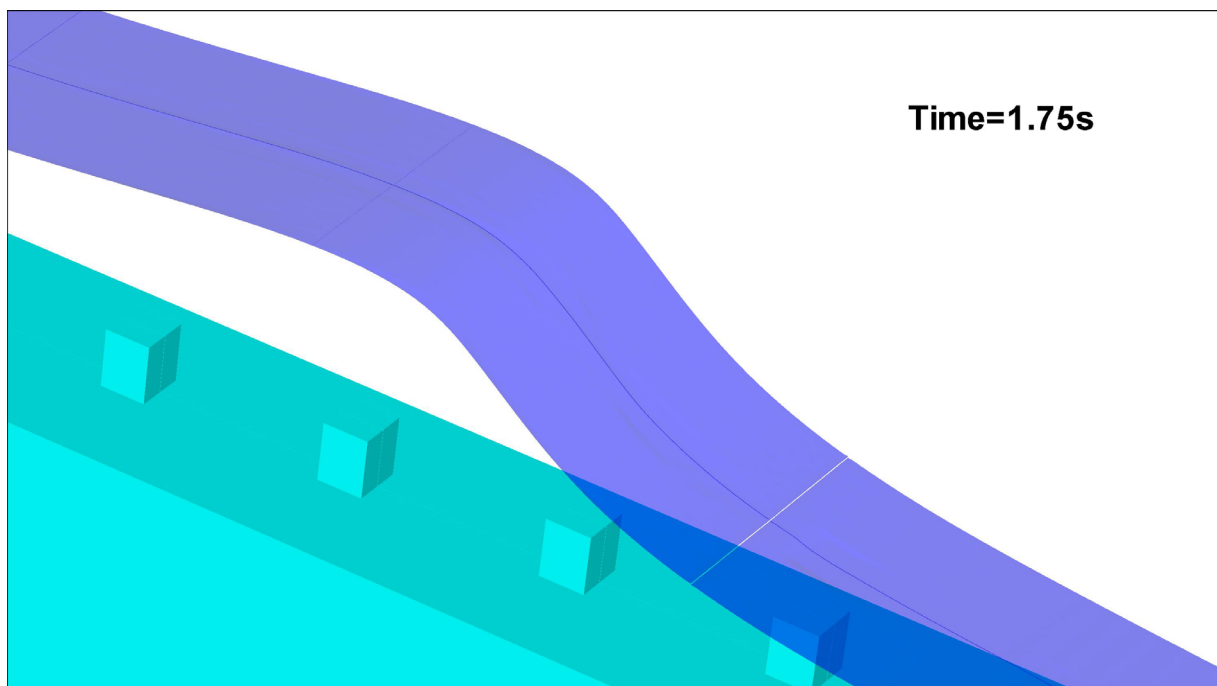


Fig.7.30: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t = 1.75s$. $\varphi = 0.5$

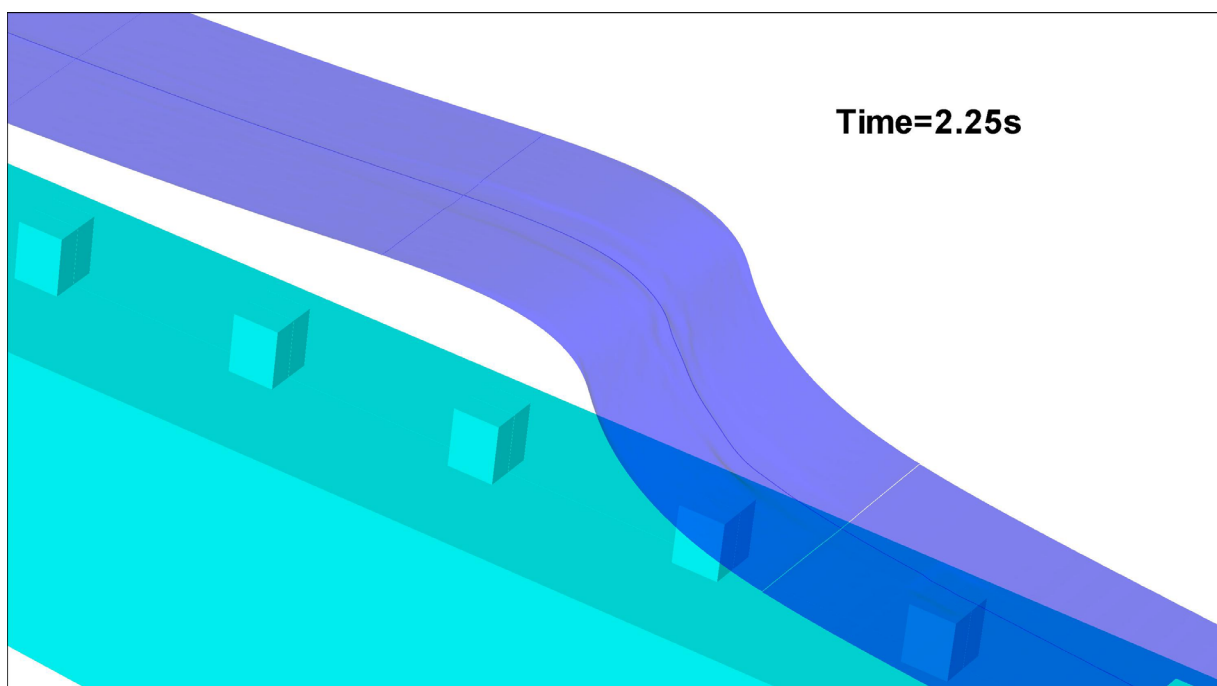


Fig.7.31: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t = 2.25s$. $\varphi = 0.5$

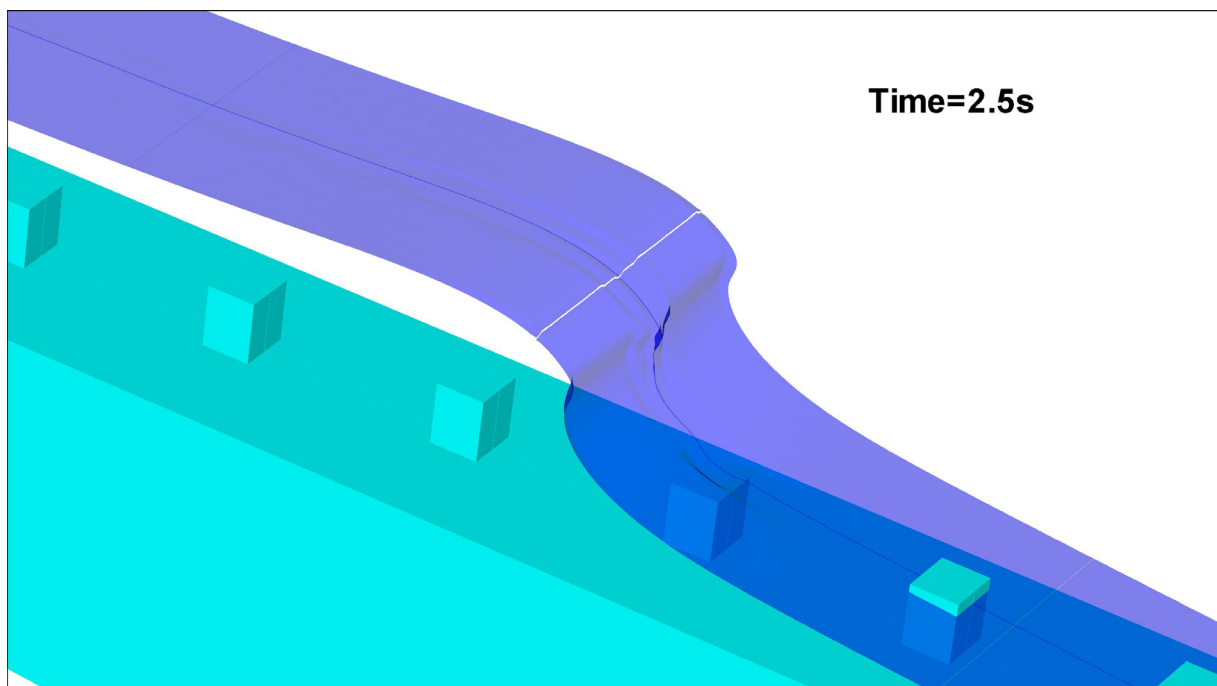


Fig.7.32: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=2.5s$. $\varphi=0.5$

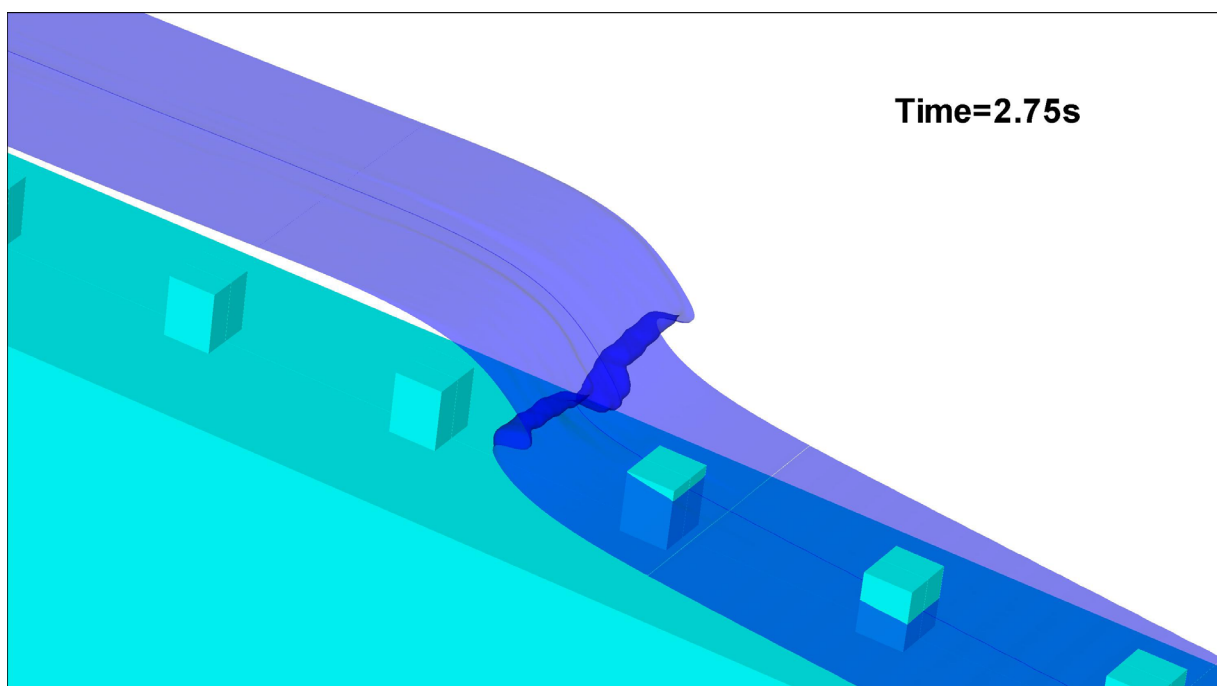


Fig.7.33: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=2.75s$. $\varphi=0.5$

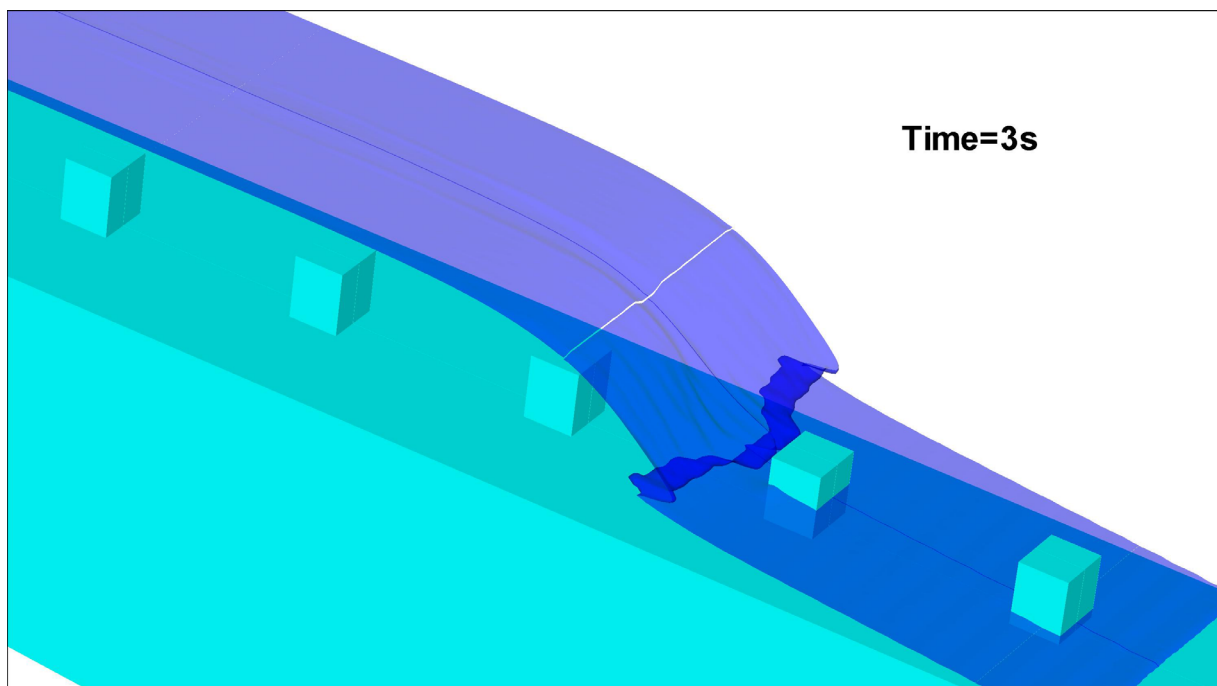


Fig.7.34: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3s$. $\varphi=0.5$

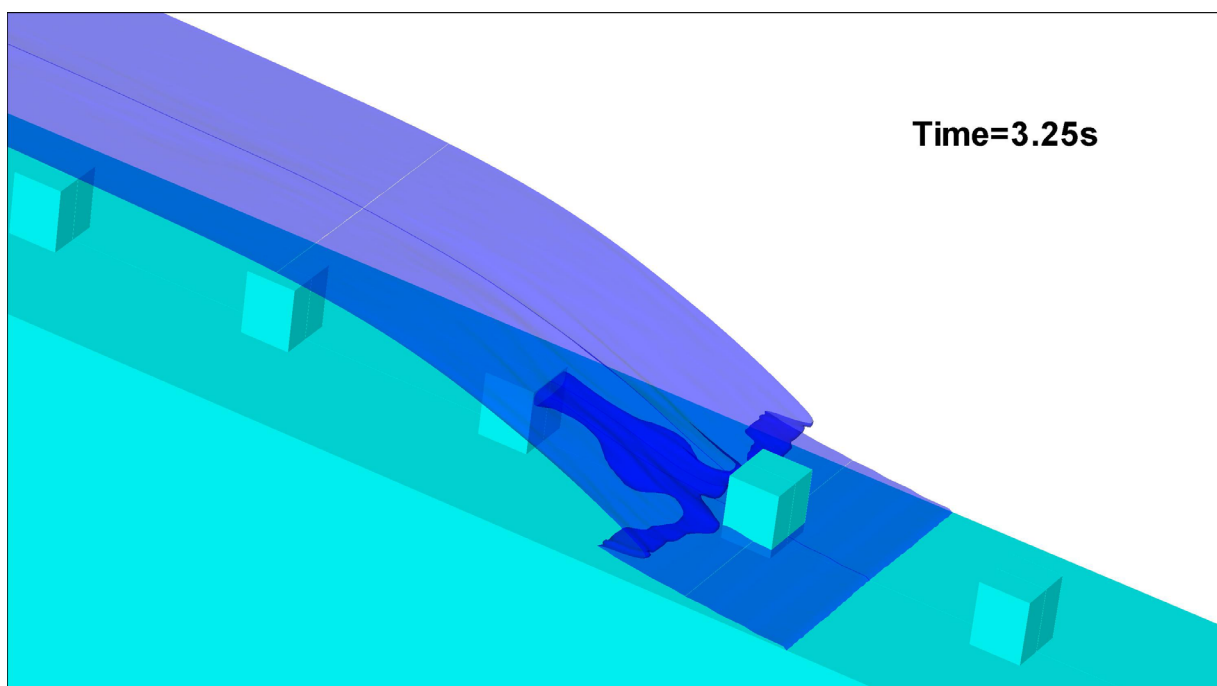


Fig.7.35: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.25s$. $\varphi=0.5$

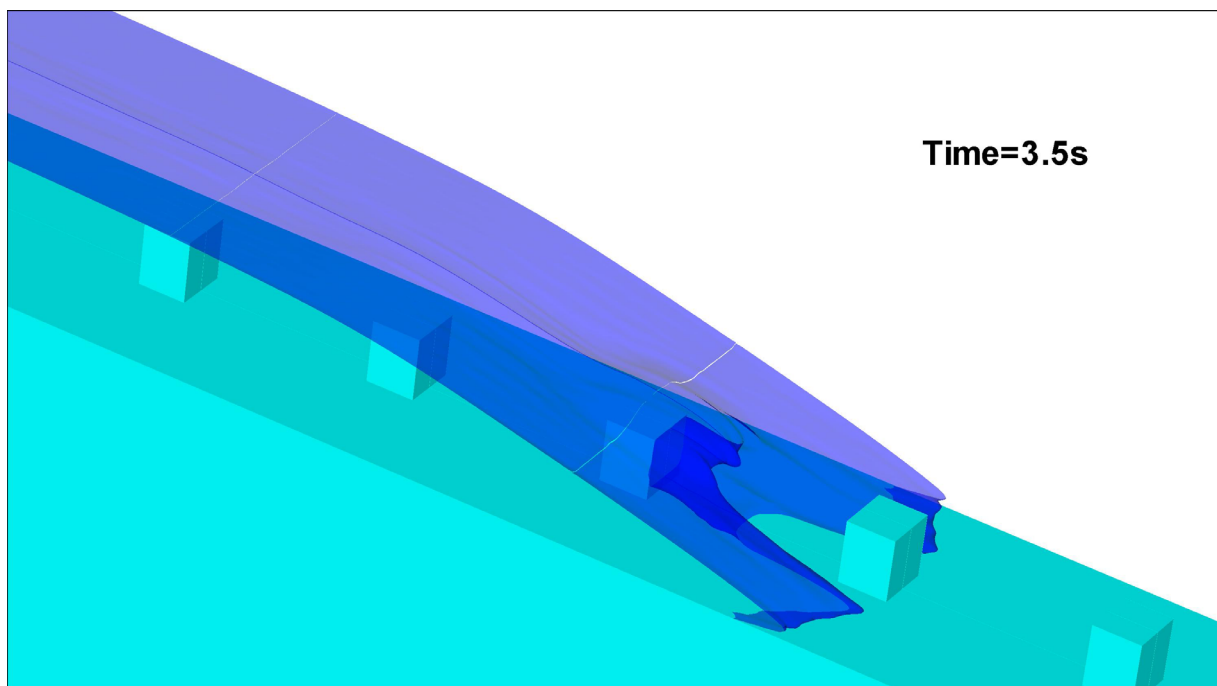


Fig.7.36: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.5s$. $\varphi=0.5$

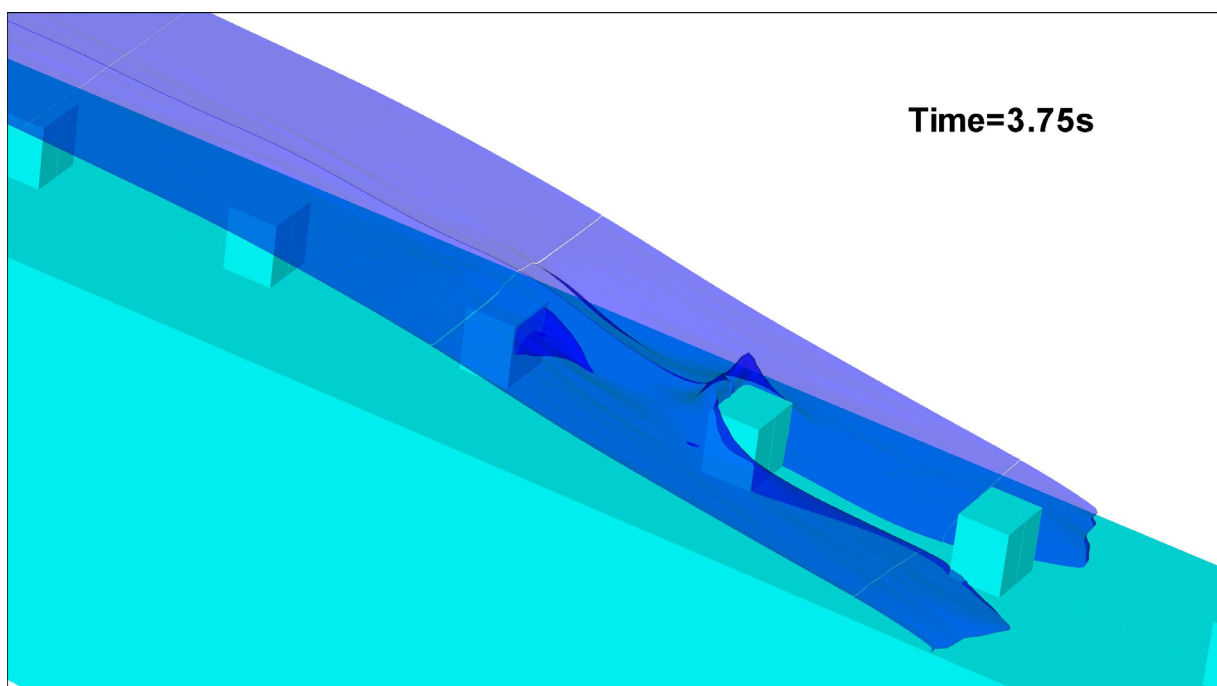


Fig.7.37: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=3.75s$. $\varphi=0.5$

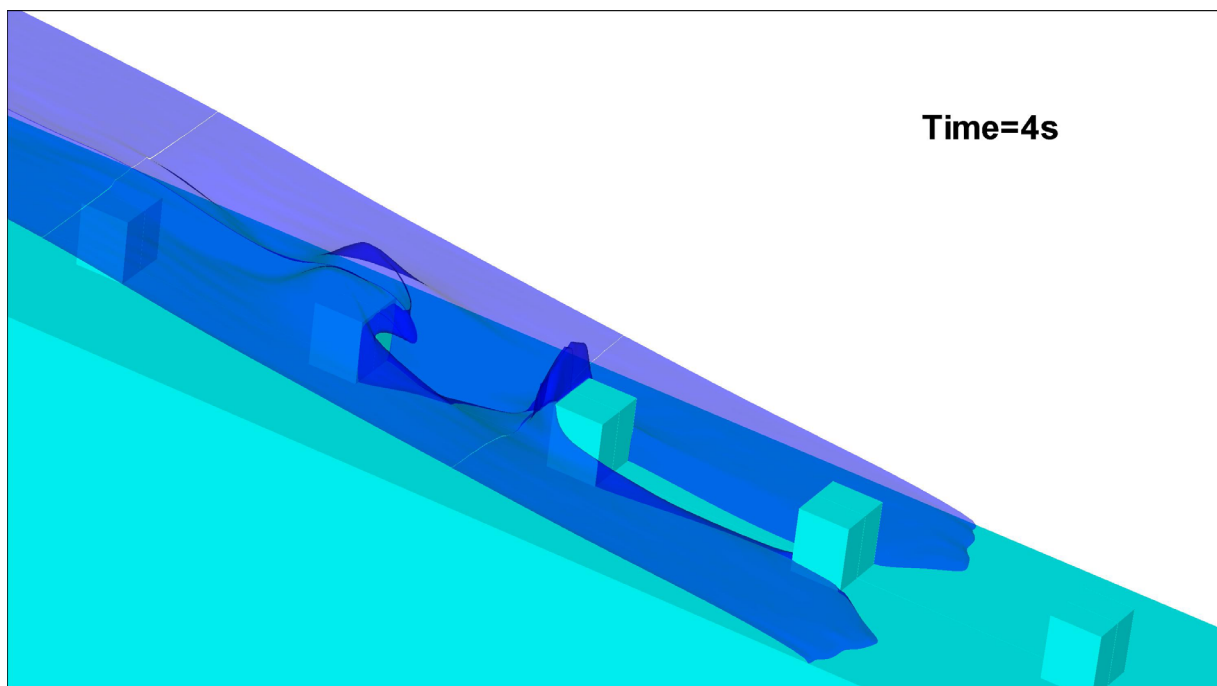


Fig.7.38: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4s$. $\varphi=0.5$

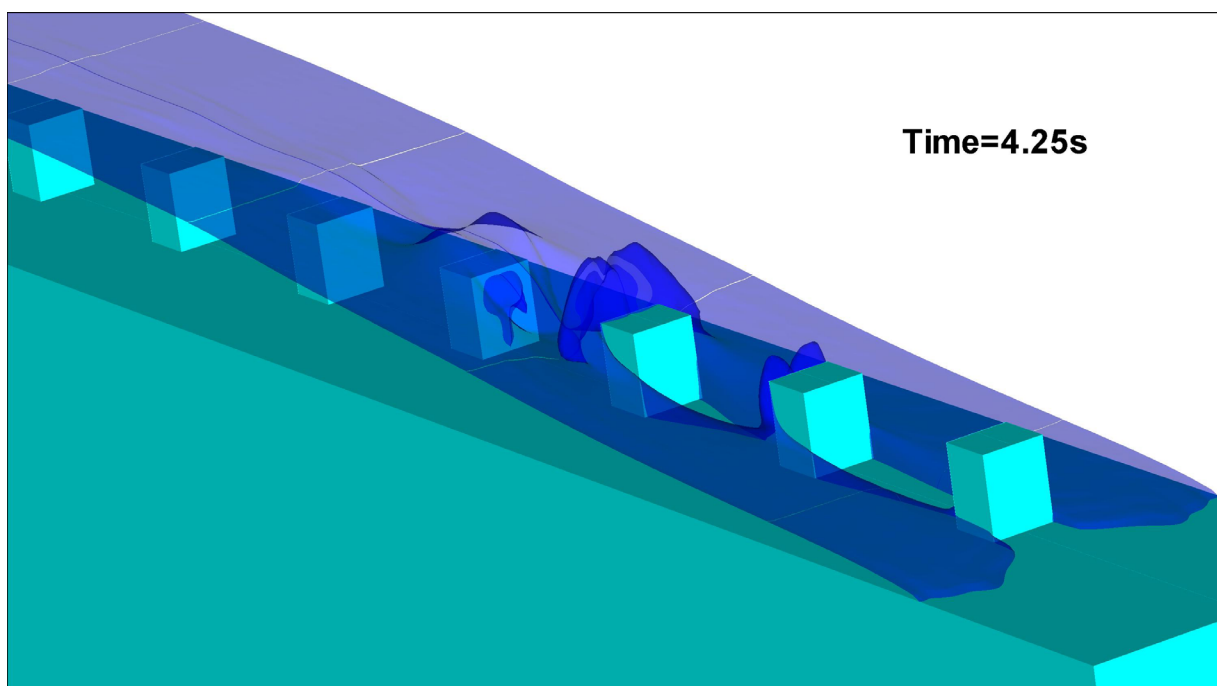


Fig.7.39: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4.25s$. $\varphi=0.5$

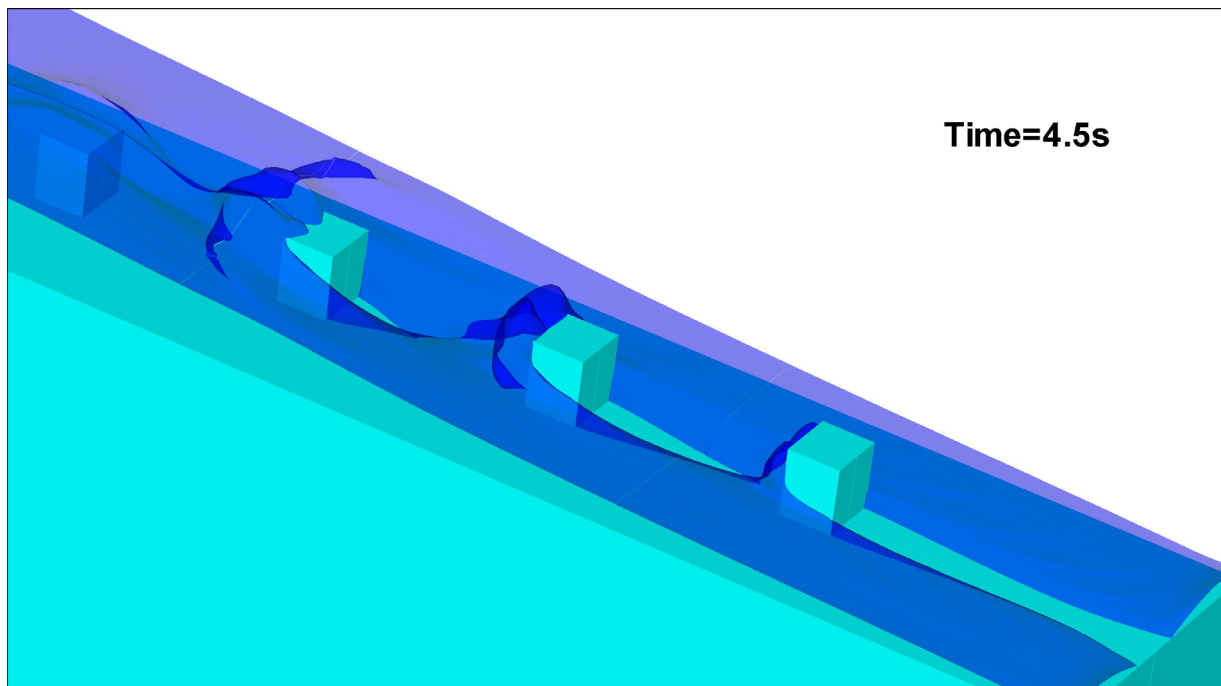


Fig.7.40: Déferlement de vague 3D: Surface libre à $t=4.5s$. $\phi=0.5$

7.3.2.2 Profil de la surface libre

On présente l'évolution temporelle de la hauteur d'eau le long des points de mesure P_i suivant la verticale. Les positions de ces points sont indiquées sur la figure Fig.7.41. Les points P_i sont définies par $P_0 (-0.61, -0.87, 0.045)$ et $P_i \left(-0.38+i, -0.87+\frac{1}{15}i, 0.045 \right)$, $i=1, 19$

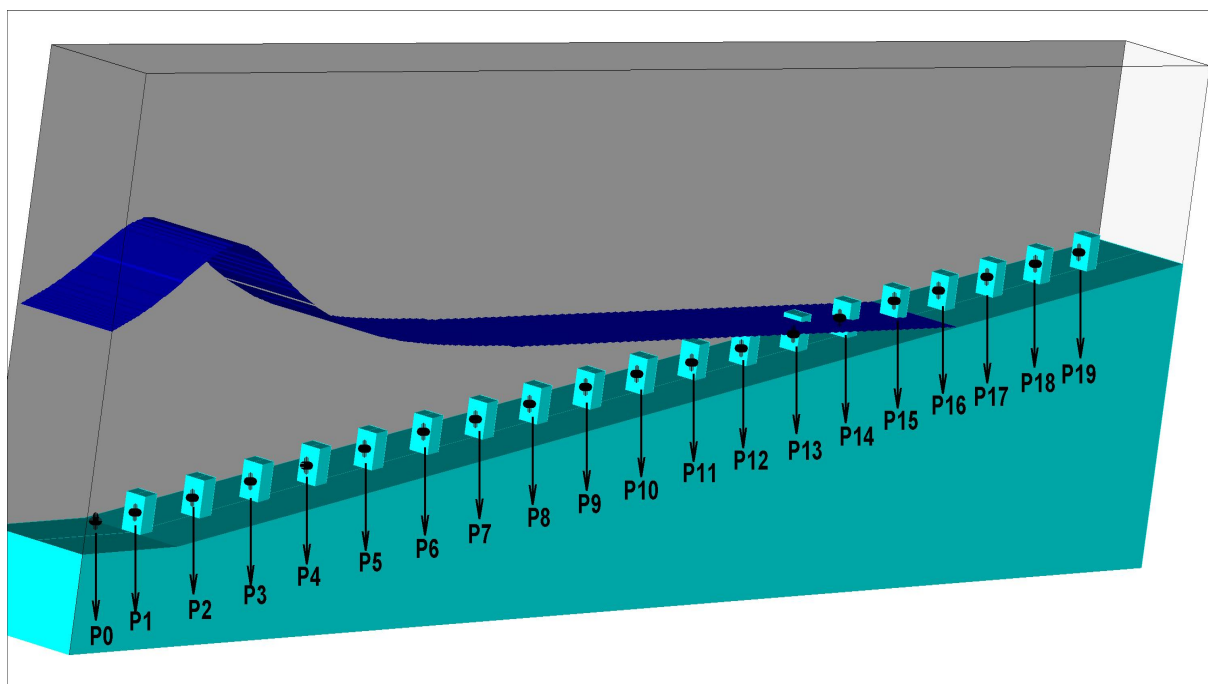


Fig.7.41: Déferlement de vague 3D: Emplacements des points pour la pression et pour l'amplitude de la hauteur d'eau.

Les figures Fig.7.42-Fig.7.44 représentent l'évolution temporelle de la hauteur d'eau pour quelques points P_i .

A l'initialisation, la crête de la vague est au niveau de la sonde P2 (Fig.7.42). Au début de la simulation, l'effet des macro-rugosités n'est pas encore significatif et la vague se propage pratiquement sans déformation avec une petite perte d'hauteur due à la diffusion numérique (Fig.7.42). L'amplitude de la vague atteint son niveau maximal à 2.25s au niveau de la sonde P8 (Fig.7.43) juste avant le début de la phase de retournement. A partir de cet instant, le profil de la surface libre est déformé et on a des oscillations rapides (Fig.7.44) au niveau des points P12, P13 et P14 (Fig.7.44). Ces oscillations se produisent au moment de l'impact. Avant l'impact avec le point P12 (Fig.7.44, $t=2.5s$), le point de déferlement était déjà atteint (Fig.7.32).

Après le passage du soliton à chacun des points, on note une deuxième vague d'amplitude inférieure, de l'ordre de 0.05m. il pourrait s'agir de l'onde de réflexion observée par Cooker et al. [Cooke *et. al.* 1990]. Ce phénomène d'apparition de vague nouvelle se propageant loin de l'obstacle impacté est appelé régime C-C (Crest-Crest exchange) décrit aussi dans [Cooke *et. al.* 1990]. Ce dernier analyse l'interaction d'une onde solitaire avec un obstacle de forme semi-cylindrique le long d'un canal.

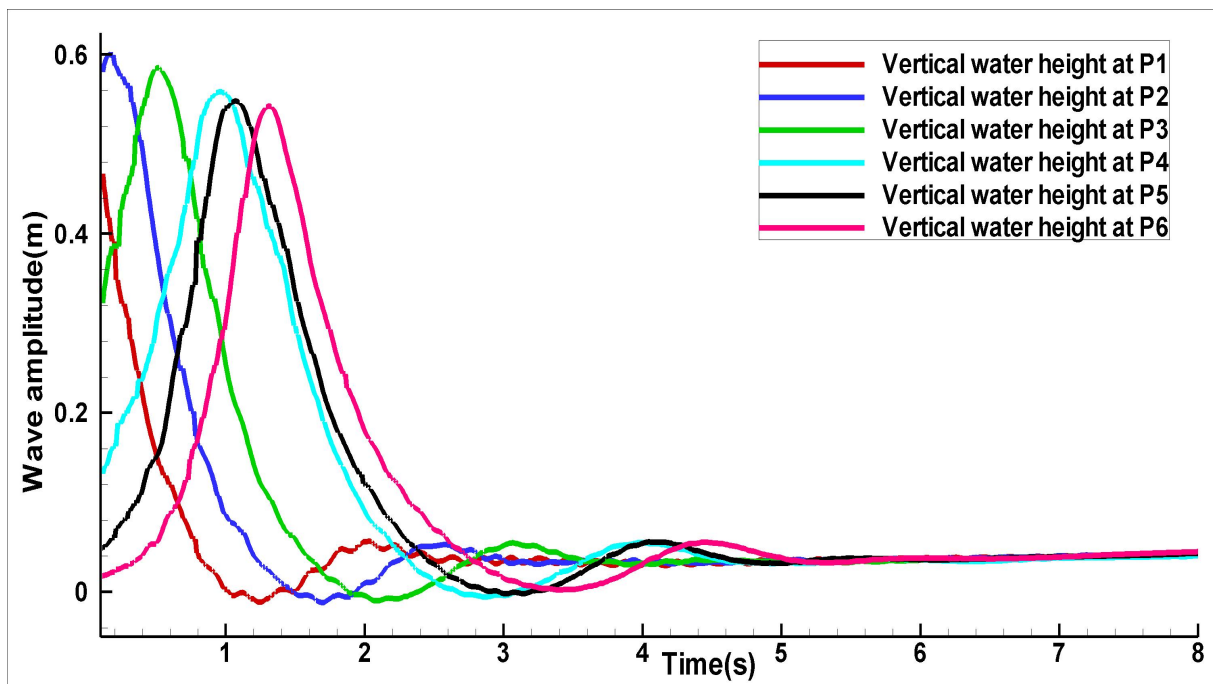


Fig.7.42: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P1, P2, P3, P4, P5 et P6

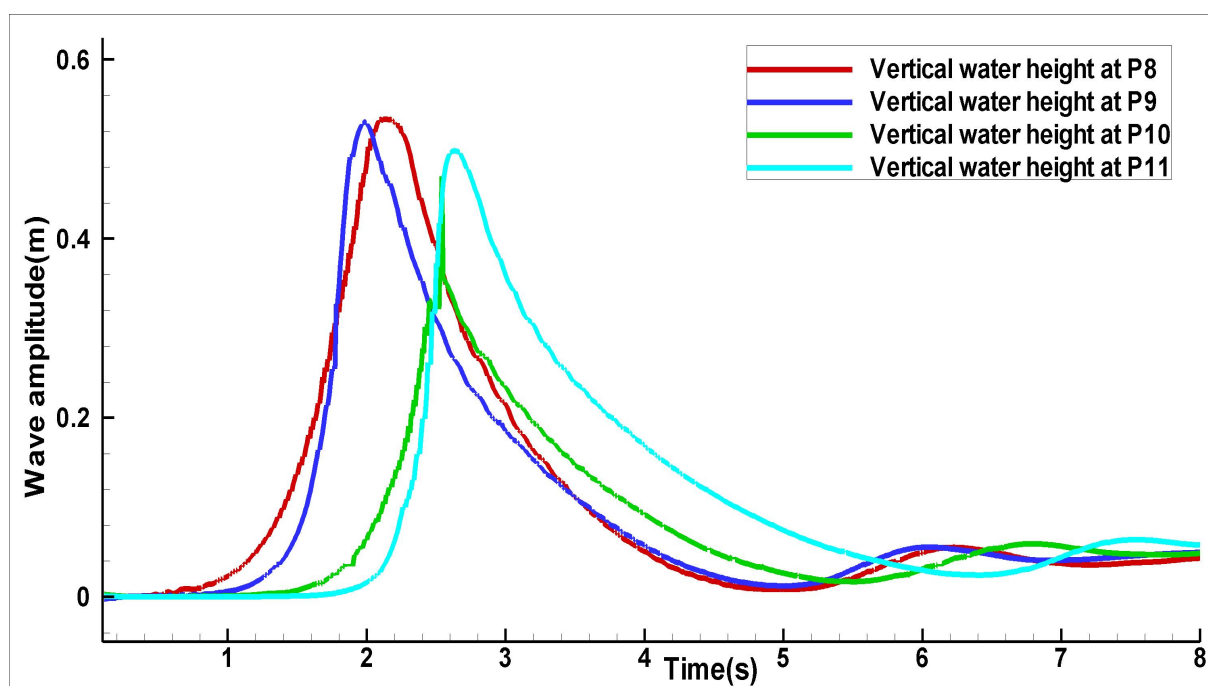


Fig.7.43: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P8, P9, P10 et P11

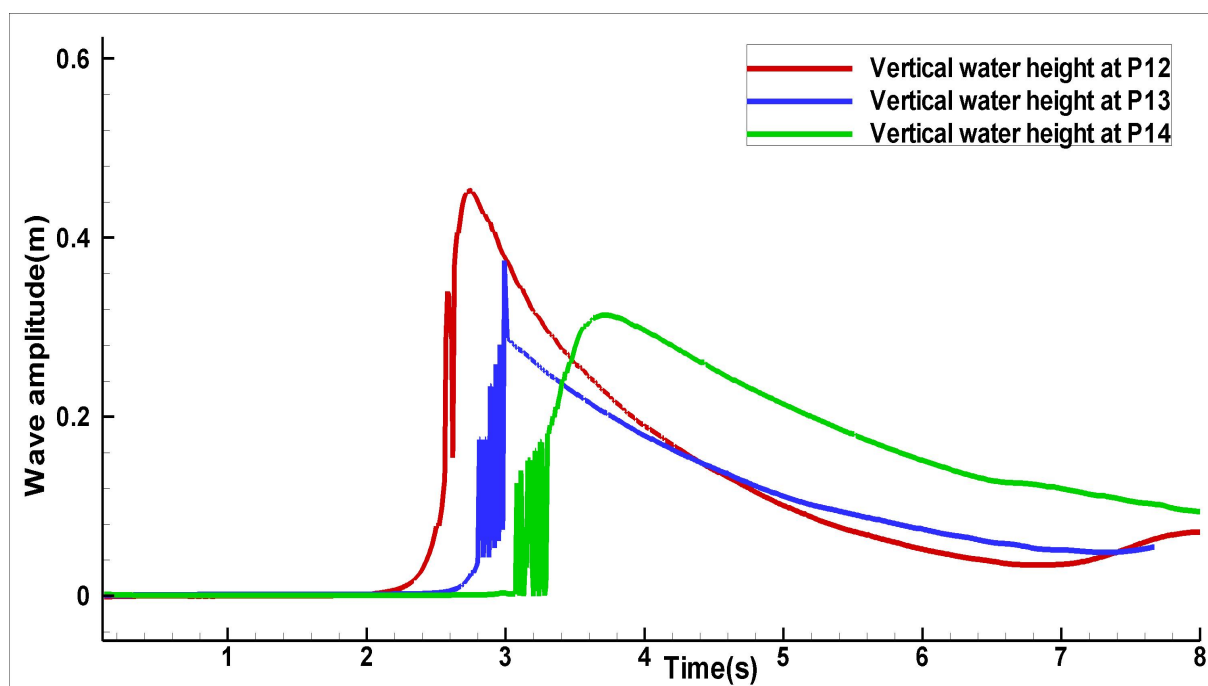


Fig.7.44: Déferlement de vague 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux points P12, P13, et P14

7.4 Rupture de barrage 3D en présence d'obstacle

Nous présentons dans ce paragraphe, une étude d'une rupture de barrage en présence d'obstacle. On dispose des données expérimentales pour ce cas 3D pour valider notre modèle bi-fluide. Ce problème du "dambreak" est un cas très intéressant pour la validation des modèles numériques multi-fluide. Il présente des déformations importantes de la surface libre et des interactions fluide-structure. Le problème de rupture de barrage en 3D avec obstacle a déjà été étudié par plusieurs auteurs avec des méthodes numériques différentes. On peut citer les travaux de Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005], d'Issa et Violeau [Issa et Violeau, 2006], de Vincent et al. [Vincent *et al.*, 2010], de Crespo [Crespo 2008], de Gomez-Gesteira et al. [Gomez-Gesteira *et al.*, 2004]. Des études bidimensionnelles avec ou sans obstacles peuvent être consultées dans [Ercicuma *et al.*, 2010], [Lin *et al.*, 2003], [Zhou *et al.*, 2004], [Gallegos *et al.*, 2009] et [Shakibaeinia et Jin, 2011].

7.4.1 Géométrie et caractéristiques des simulations

On considère un bloc de fluide parallélépipédique initialement au repos s'effondrant dans un bassin tridimensionnel, muni d'un obstacle parallélépipédique posé sur un fond plat. Ce cas est présenté en détail par Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005], Issa et Violeau [Issa et Violeau, 2006] et Vincent et al. [Vincent *et al.*, 2010]. Le tableau Tab.7.2 et les figures Fig.7.45-Fig.7.46 présentent la géométrie de l'étude afin de se référer à l'expérience de Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005]. Le domaine de calcul est de 3.22m de long, 1m de hauteur et de 1m de largeur. Un obstacle placé à partir de $x=0.6635$ m à 1.4m du réservoir (Tab.7.2).

Dimension (m)	Xmin	Xmax	Ymin	Ymax	Zmin	Zmax
Réservoir d'eau	2	3.22	0.0	0.55	-0.5	0.5
Obstacle	0.6635	0.8245	0.0	0.161	-0.2015	0.2015

Tab.7.2: Dambreak 3D: Dimension du réservoir et de l'obstacle

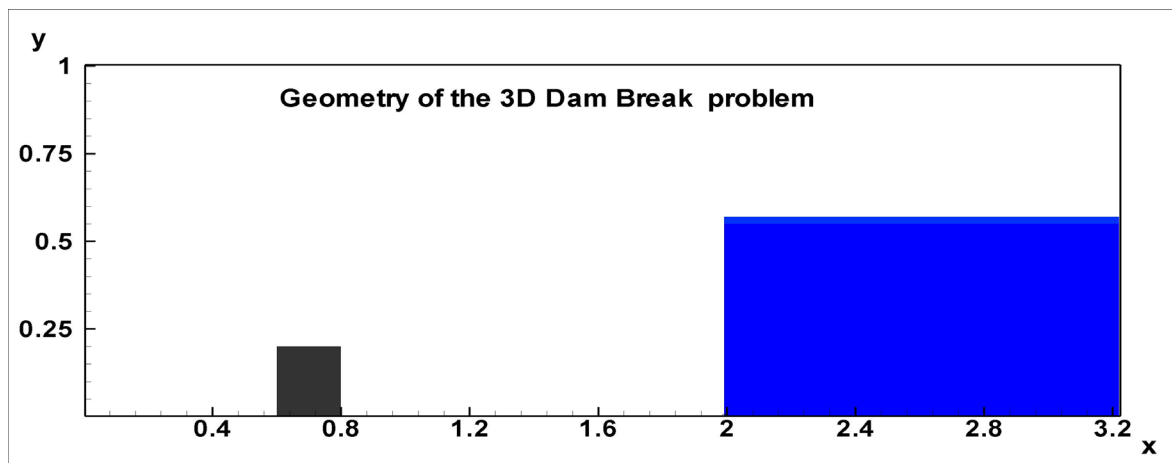


Fig.7.45: Dambreak 3D: Visualisation dans le plan (x, y)

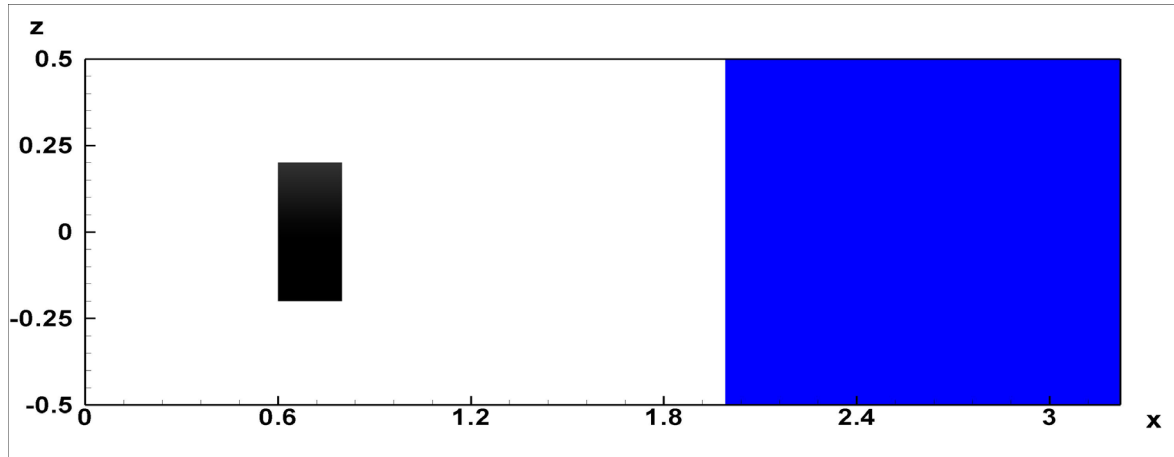


Fig.7.46: Dambreak 3D: Visualisation dans le plan (x, z)

7.4.2 Maillage

Le maillage généré est hexaédrique et régulier. Le nombre de maille est de 0.8 millions afin d'être cohérent avec le modèle de K.M.T. Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005]. Kleefsman utilise une technique de type Volume of Fluid avec 1.22 millions de cellules [Kleefsman *et al.*, 2005]. La prochaine étape sera de réaliser le même nombre de mailles. Le domaine est divisé en 24 sous-domaines pour l'utilisation de MPI. Le maillage est raffiné au niveau de l'obstacle (Fig.7.47). Trois niveaux de CFL sont obtenus avec ce maillage.

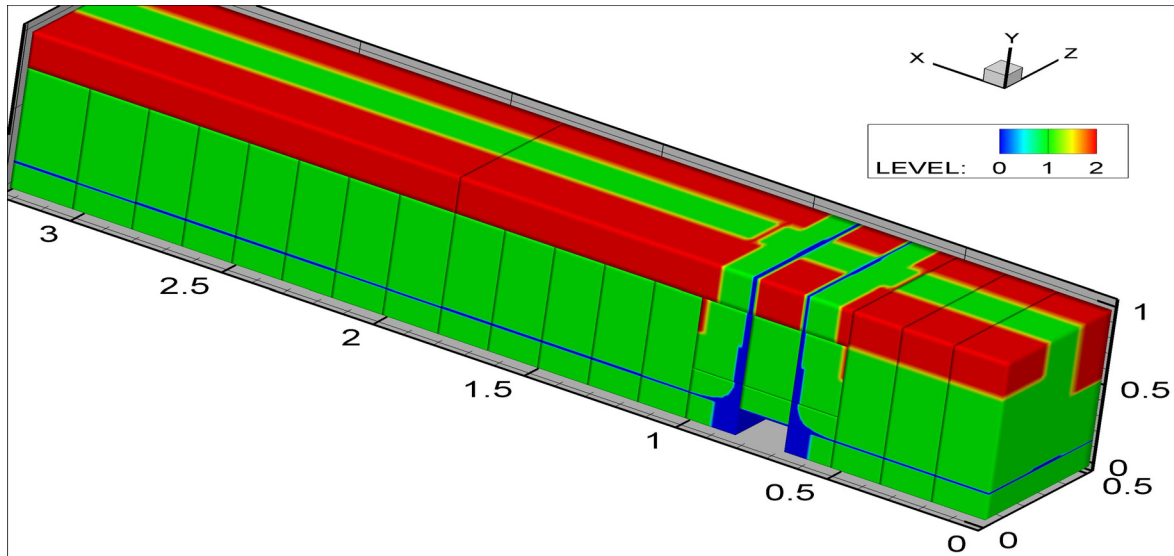


Fig.7.47: Dambreak 3D: Niveaux de raffinement du maillage

7.4.3 Conditions initiales et conditions aux limites

Pour l'initialisation (Fig.7.48), une fonction d'utilisateur dans le solveur nous a permis de générer les conditions initiales. A l'instant initial, le réservoir est rempli d'eau avec une vitesse nulle. La masse volumique de l'eau est égale à la masse volumique de référence $\rho_{0water} = 1000 \text{ kg/m}^3$. Pour l'air on choisit $\rho_{0air} = 1 \text{ kg/m}^3$. La pression d'initialisation est égale à la pression hydrostatique. L'amplitude initiale de la hauteur d'eau est de $h = 0.55 \text{ m}$. Le domaine est symétrique par rapport au plan xOy. On simule donc uniquement la moitié du domaine $0.0 \text{ m} < Z < 0.5 \text{ m}$. Une condition de symétrie est imposée sur le côté latéral $Z = 0.0 \text{ m}$.

vue la symétrie de l'écoulement. La durée de la simulation est de 6s. L'expérience numérique a montré que la vitesse de l'écoulement s'approche de 6m/s [Violeau, 2010]. Pour cette vitesse maximale de l'écoulement et pour une approche 'faible nombre de Mach', la vitesse du son c_0 devrait être fixée à 60 m/s pour avoir un nombre de Mach de 0.1. Nous avons opté cependant à une vitesse du son de 20m/s pour alléger les temps de calcul, d'où un nombre de Mach de 0.3. Avec ce nombre de Mach, notre modèle reste pertinent et la sensibilité par rapport à cette variable sera discuté dans le paragraphe 7.4.5.5.

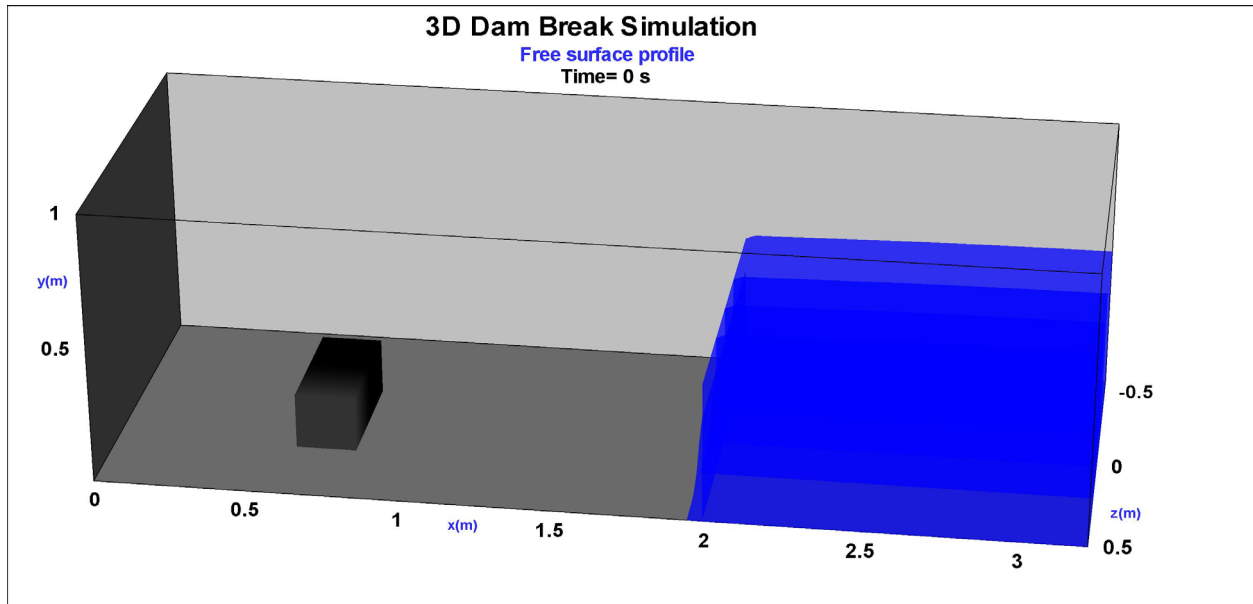


Fig.7.48: Dambreak 3D: Initialisation

Les méthodes de compression d'interface et d'Adams Bashforth avec l'approche multi-échelle sont utilisées pour ce cas.

7.4.4 Emplacements des sondes

Dans ce calcul nous disposons des données expérimentales qui nous ont été fournies par le Professeur Arthur Veldman (<http://www.math.rug.nl/~veldman/comflow/dambreak.html>). Ces données sont issues de l'expérience de Kleefsman et al. [Kleefsman *et al.*, 2005]. Elles concernent l'évolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H1 et H4 et l'évolution de la pression dynamique aux sondes P1 et P7 qui sont sur l'obstacle. Leurs positions sont indiquées sur la figure Fig.7.49 et sont définies par:

H2: $(x, z) = (1.0, 0.0)$

H4: $(x, z) = (2.66, 0.0)$

P1: $(x, y, z) = (0.831, 0.025, -0.026)$

P7: $(x, y, z) = (0.733, 0.165, 0.026)$

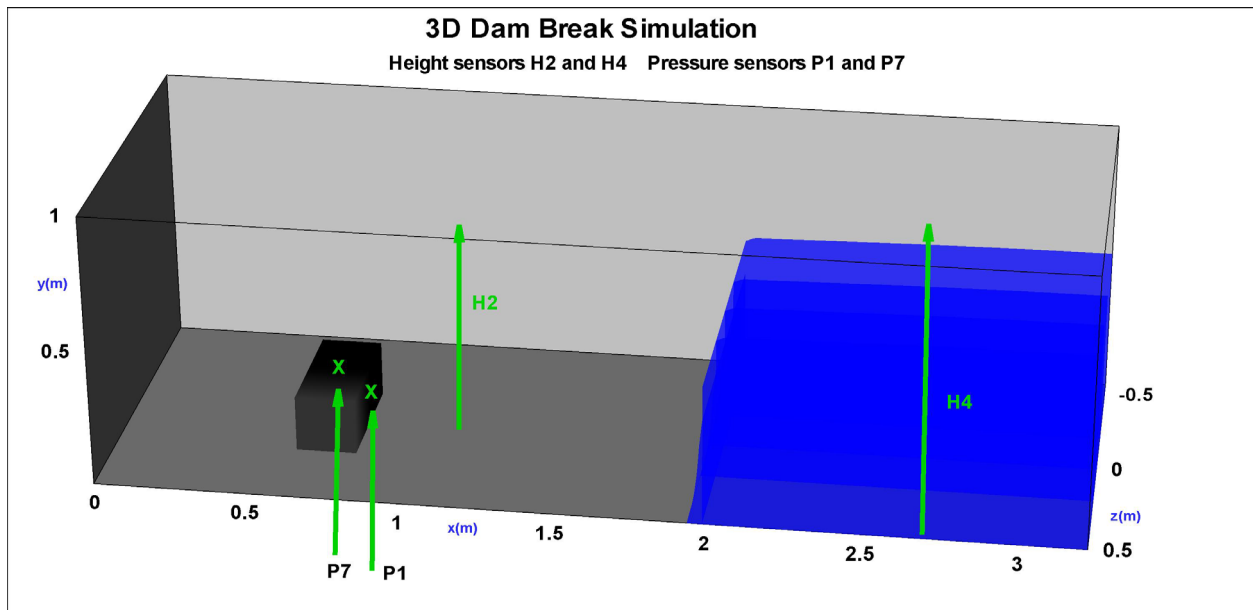


Fig.7.49: Dambreak 3D: Description de la géométrie 3D avec les emplacements des sondes pour les mesures de la pression et de l'amplitude de la hauteur d'eau.

7.4.5 Simulations et comparaisons expérimentales

7.4.5.1 Dynamique de l'écoulement

Cette simulation avec 800.000 mailles nécessite 2 jours et demi de calcul. Avant de procéder à la validation, on décrit dans ce paragraphe le processus de rupture de barrage d'une manière qualitative. Pour cela, on présente les figures montrant l'évolution de la surface libre au cours de la simulation. Les champs de vitesse et de pression sont aussi représentés au moment de l'impact.

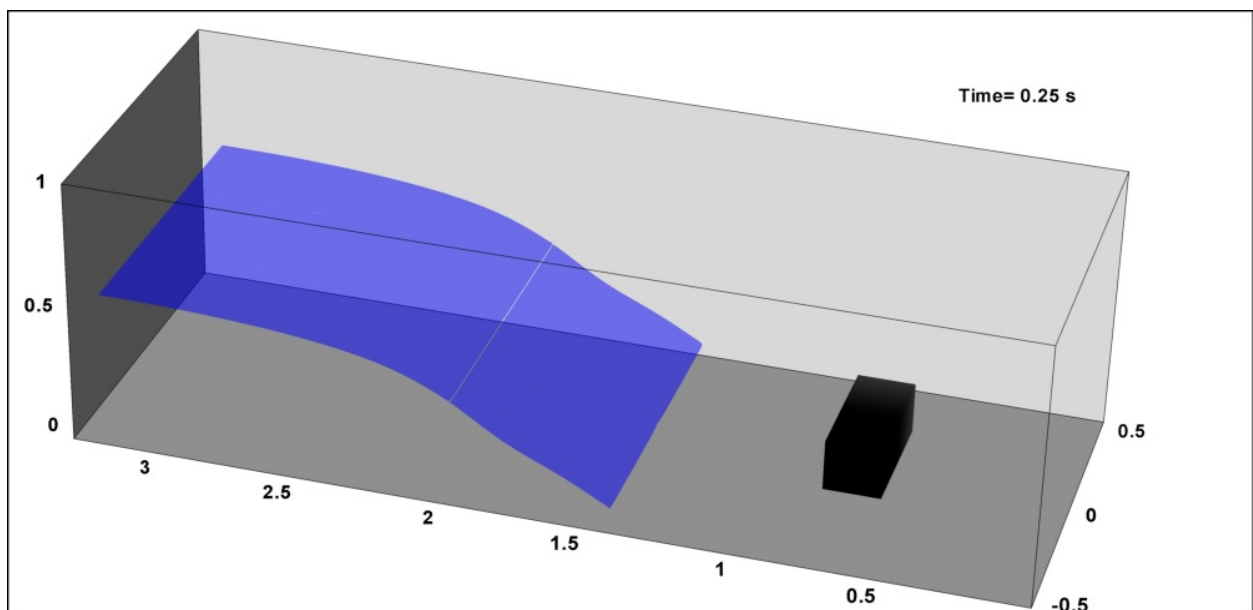


Fig.7.50: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.25s$. $\varphi=0.5$

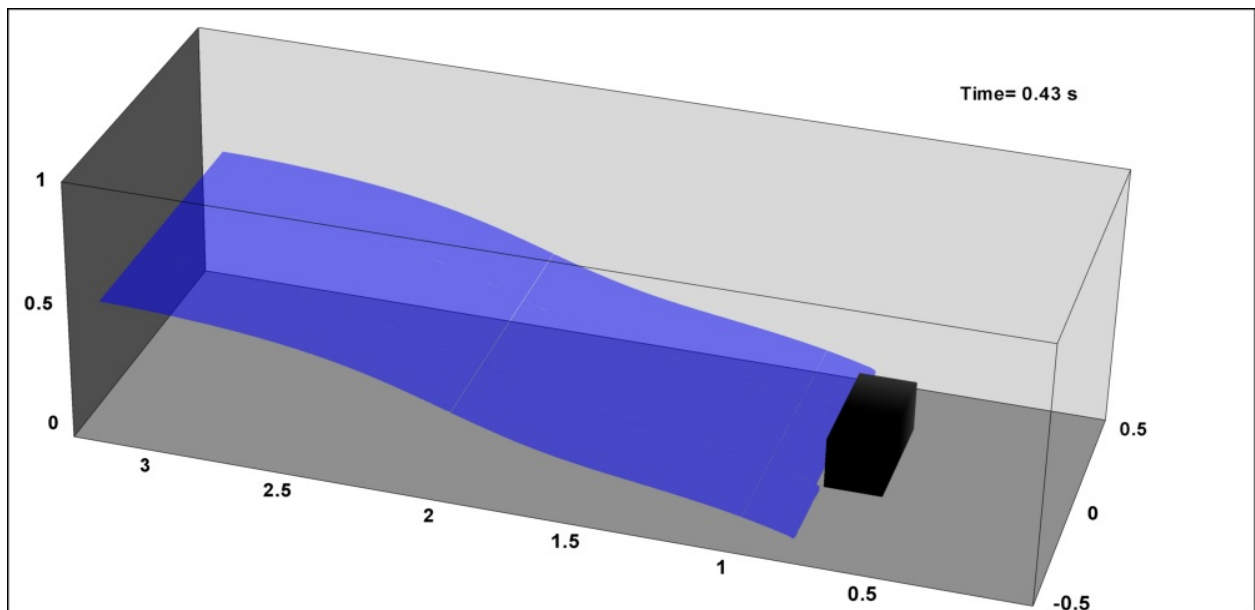


Fig.7.51: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.43$ s. $\varphi=0.5$

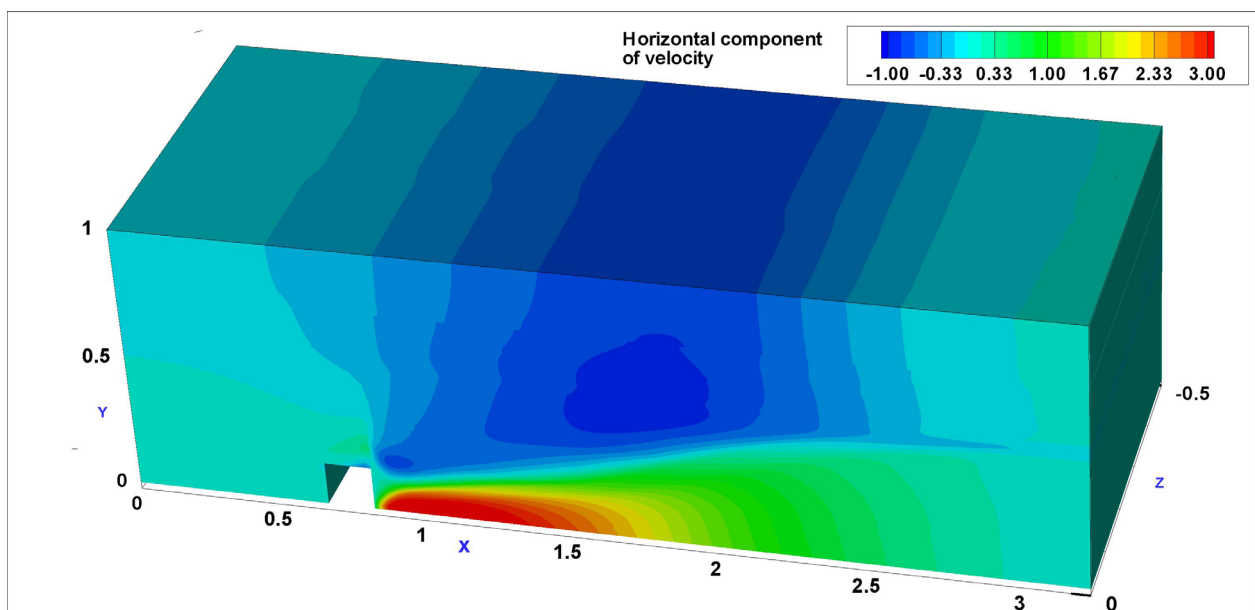


Fig.7.52: Dambreak 3D: Vitesse horizontale au moment de l'impact à $t=0.43$ s.

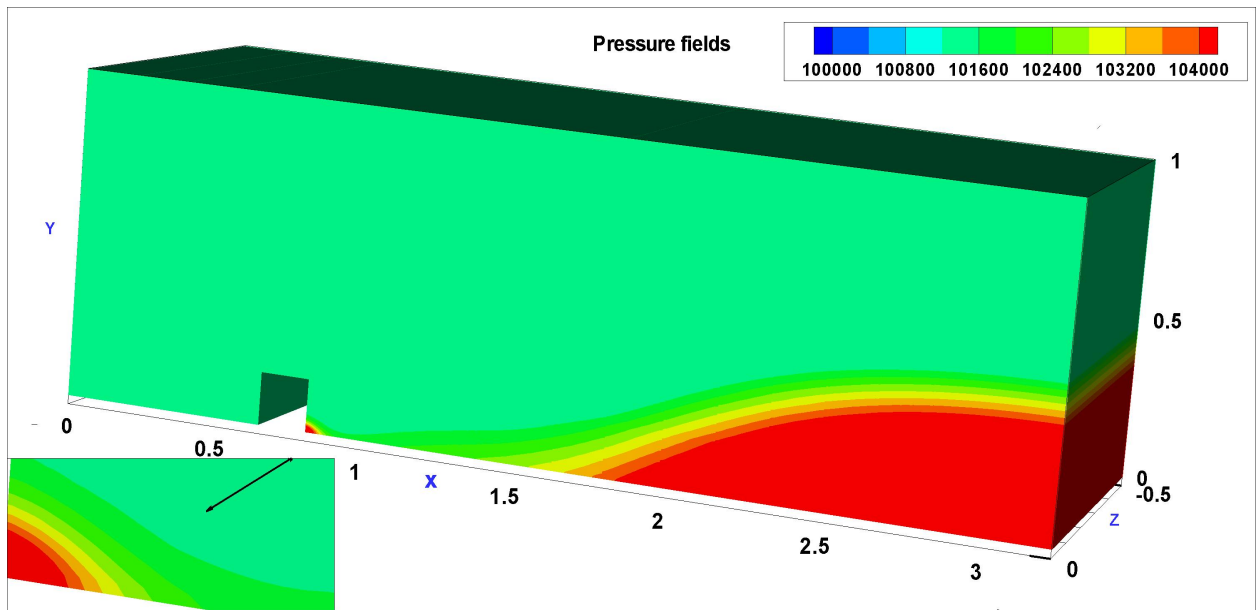


Fig.7.53: Dambreak 3D: Pression au moment de l'impact $t=0.43\text{s}$.

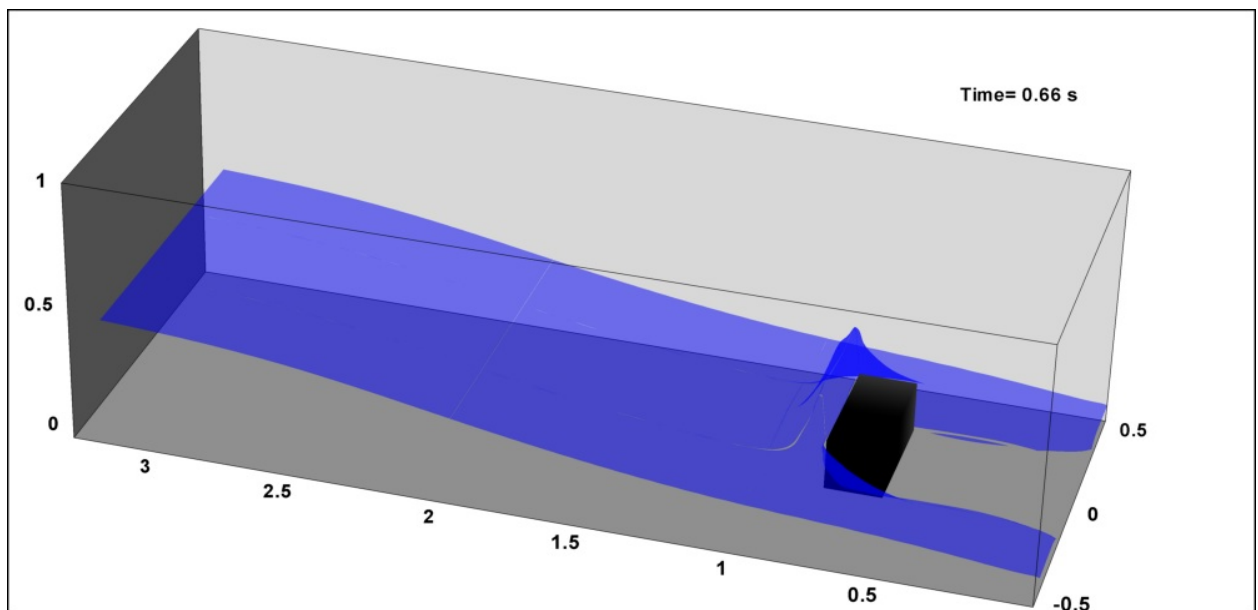


Fig.7.54: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.66\text{s}$. $\varphi=0.5$

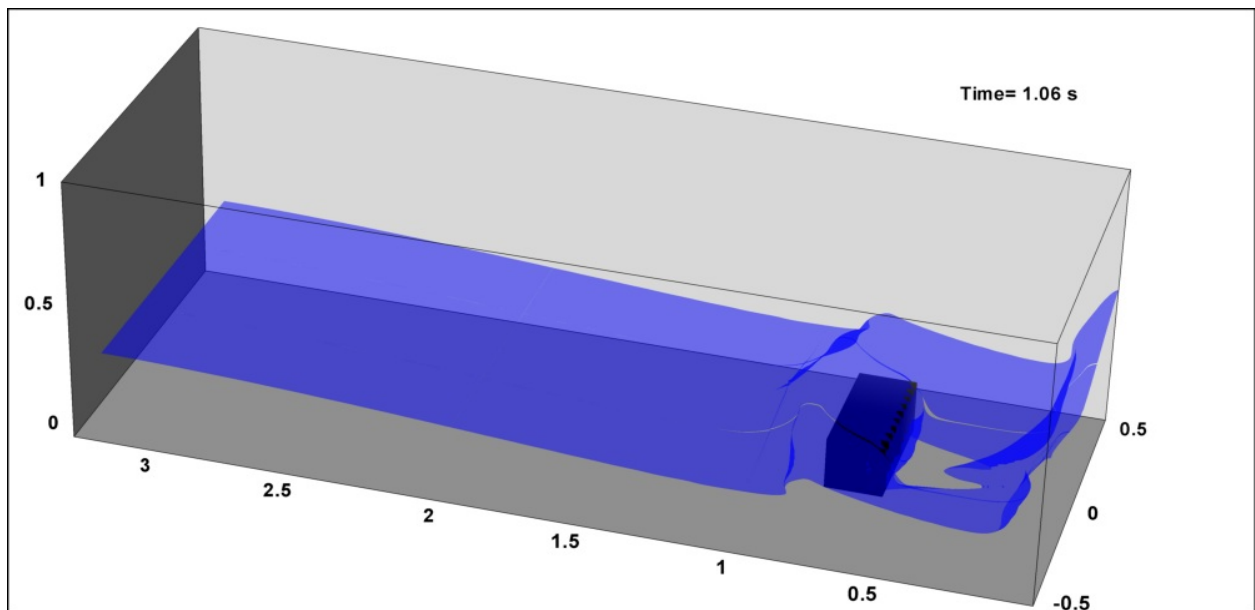


Fig.7.55: Dambreak 3D: Surface libre à $t = 1.06$ s. $\varphi = 0.5$

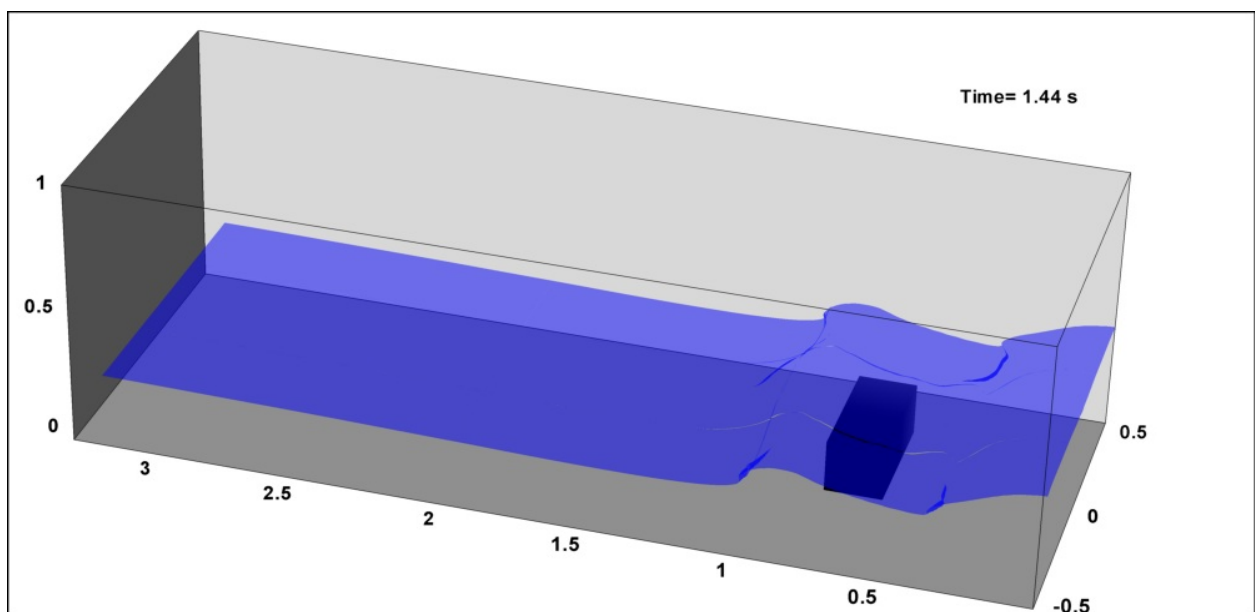


Fig.7.56: Dambreak 3D: Surface libre à $t = 1.44$ s. $\varphi = 0.5$

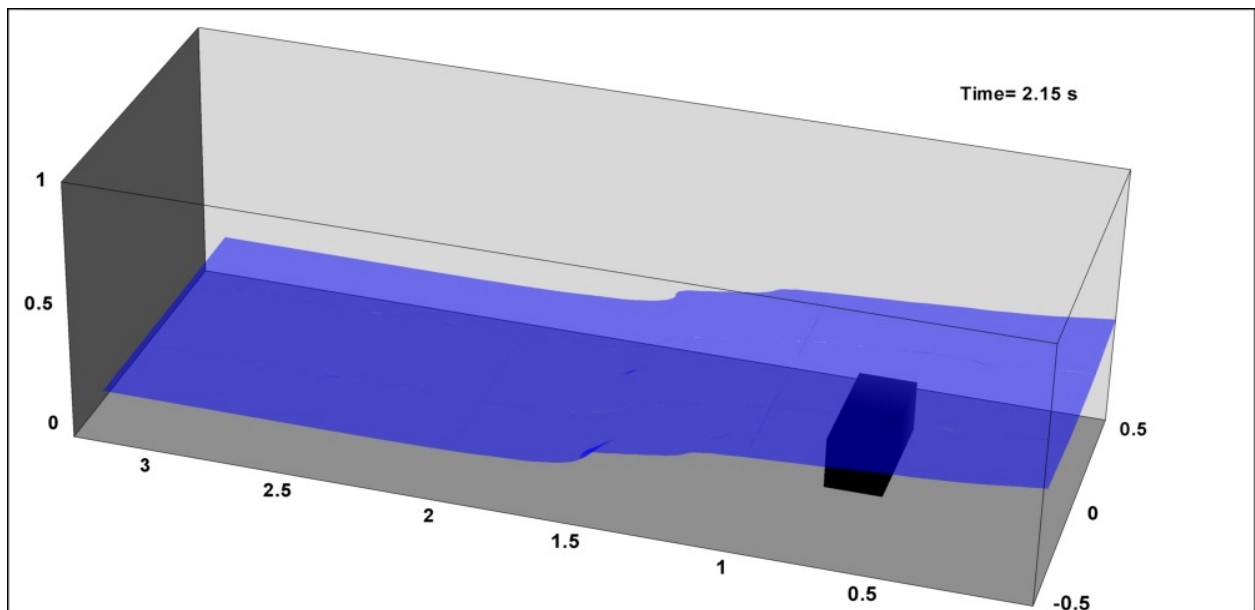


Fig.7.57: Dambreak 3D: Surface libre à $t=2.15$ s. $\varphi=0.5$

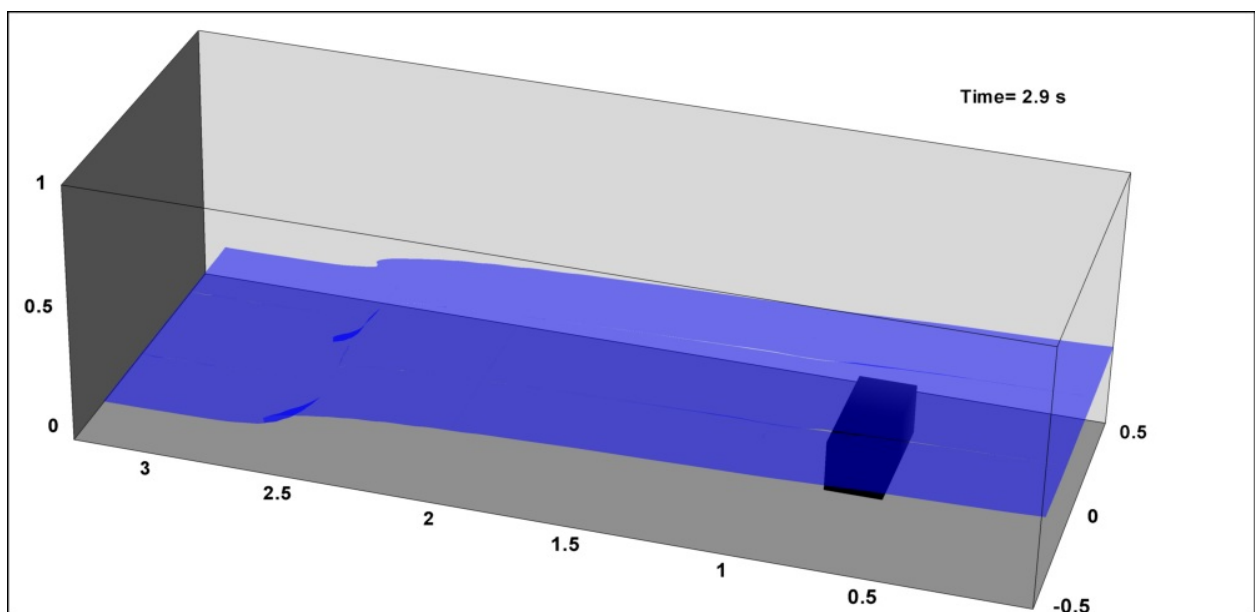


Fig.7.58: Dambreak 3D: Surface libre à $t=2.9$ s. $\varphi=0.5$

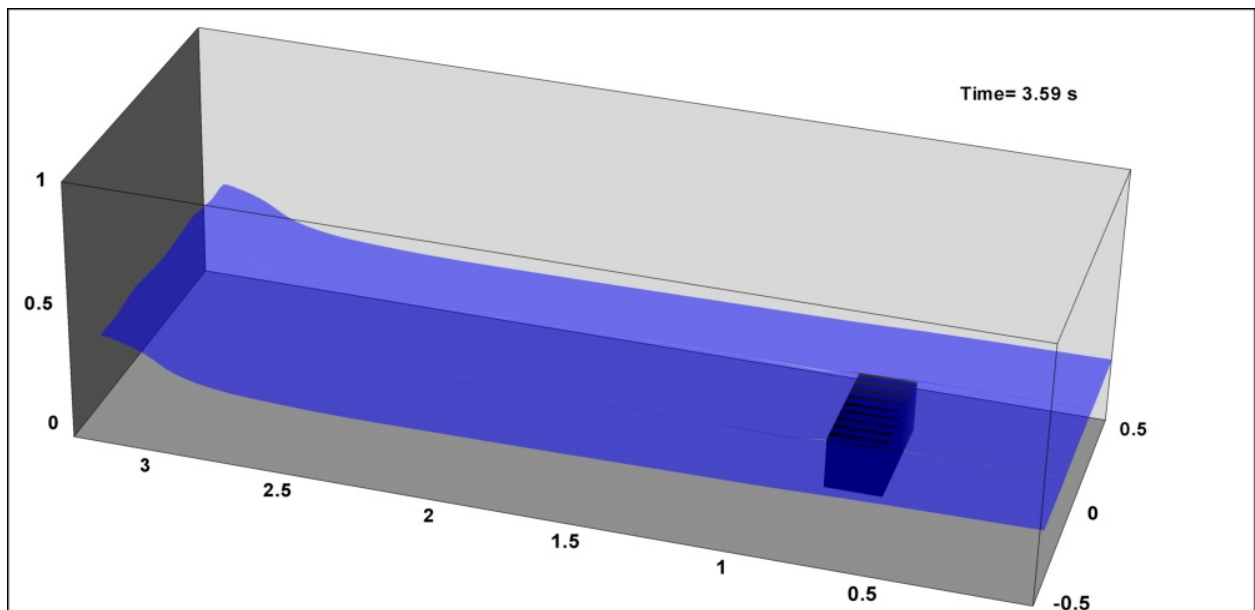


Fig.7.59: Dambreak 3D: Surface libre à $t=3.59$ s. $\varphi=0.5$

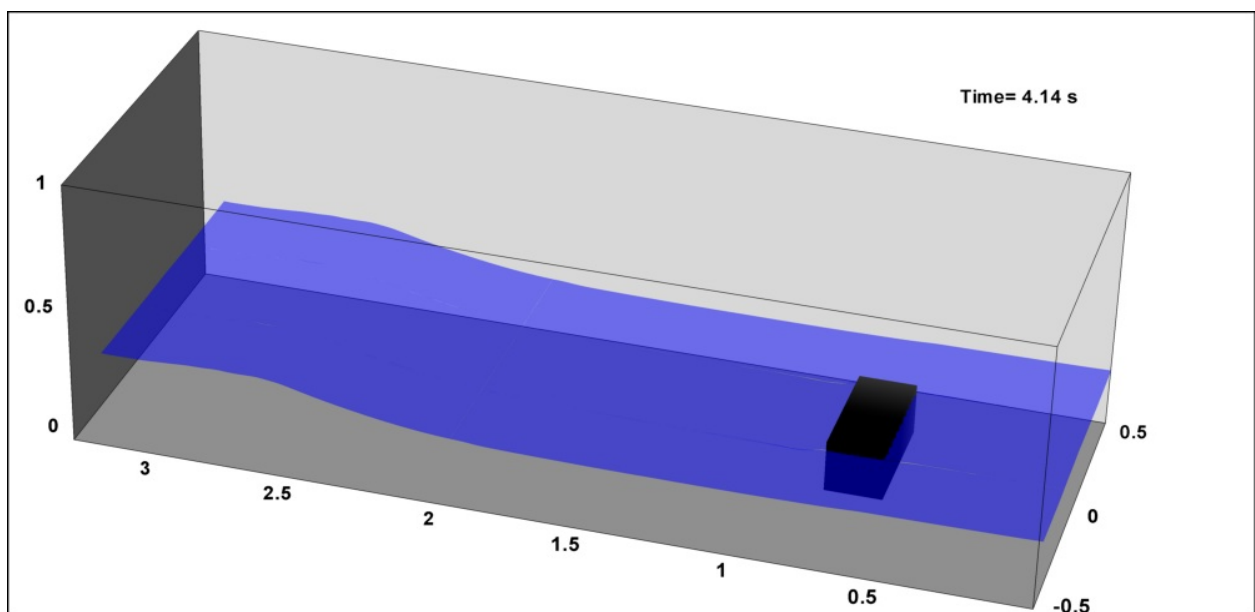


Fig.7.60: Dambreak 3D: Surface libre à $t=4.14$ s. $\varphi=0.5$

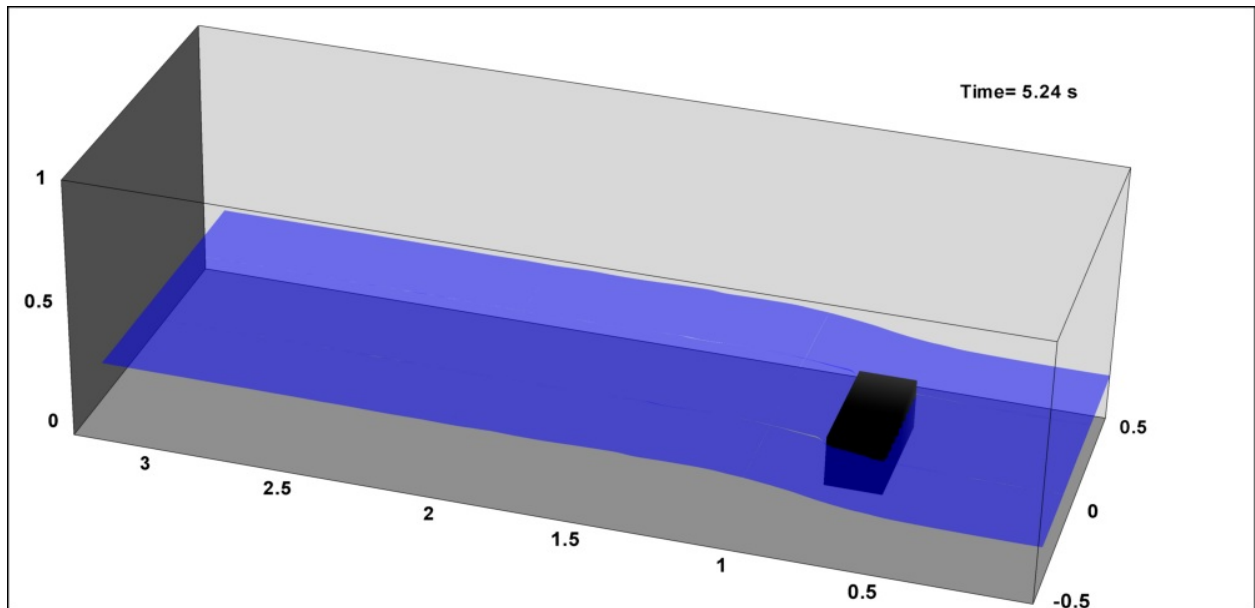


Fig.7.61: Dambreak 3D: Surface libre à $t=5.24s$. $\phi=0.5$

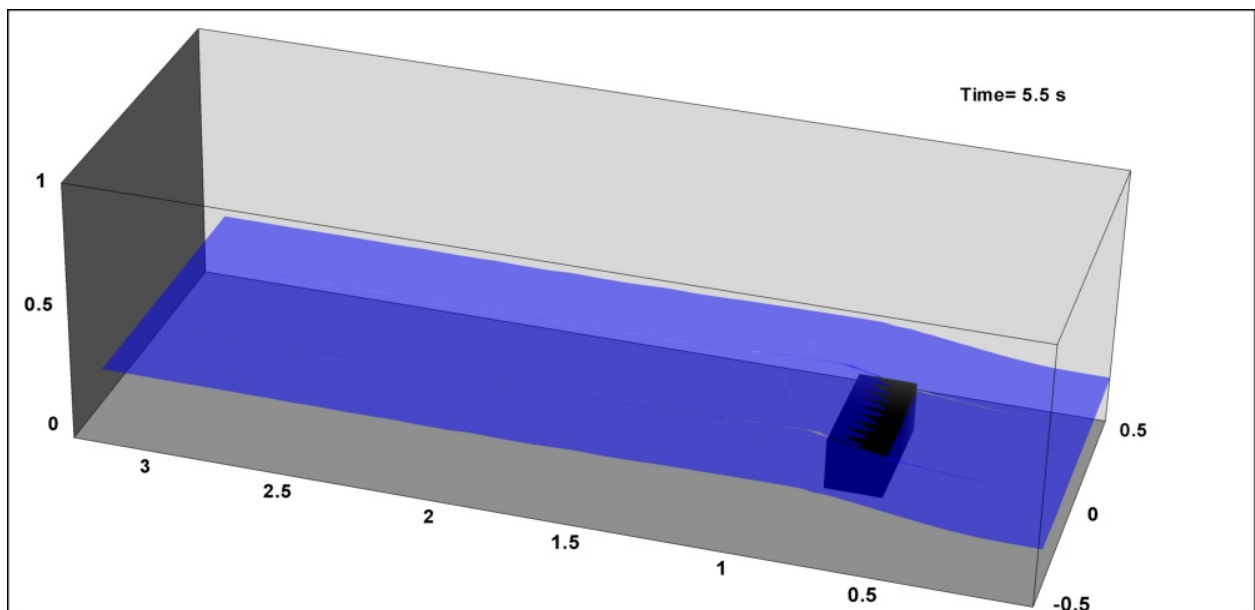


Fig.7.62: Dambreak 3D: Surface libre à $t=5.5s$. $\phi=0.5$

L'instant initial $t=0s$ correspond à la rupture du barrage. La colonne d'eau s'effondre sous l'action de la gravité. A $t=0.25s$, l'eau n'a pas encore atteint l'obstacle, la surface libre présente une partie quasiment horizontale au delà de $x=2.5m$, puis la pente augmente entre $x=1.5m$ et $x=1.8m$. Autour de $x=1.8m$, la surface libre présente un léger point d'inflexion puis garde une pente régulière jusqu'à la ligne de contact eau-air-fond solide. A partir de l'instant $t=0.43s$, l'impact se produit (Fig.7.51) et une vitesse importante suivant la direction de l'écoulement peut être localisée près de cette zone (Fig.7.52). Cet impact de l'eau avec l'obstacle crée un pic de pression totale de l'ordre de $104000Pa$, ceci est observé sur la figure Fig.7.53. Le mouvement de l'eau est modifié et est entravé par l'obstacle (Fig.7.54). L'écoulement général devient déformé.

Comme dans [Violeau, 2010], l'onde de rupture, en rencontrant l'obstacle, y forme un splash-up avant de se réfléchir sur sa paroi opposée. Cette réflexion est illustrée sur la figure Fig.7.55. L'onde se retourne (Fig.7.56) et ainsi démarre le processus du va-et-vient (Fig.7.56 à Fig.7.62). L'impact avec l'autre paroi du domaine de calcul se fait à des temps proches de 3.59s (Fig.7.59). Avec cette première approche, on voit que le comportement de l'écoulement est bien prédit avec les quatre phases globales: propagation de l'onde, impact de l'onde sur l'obstacle, impact sur le mur et réflexions successives sur les parois du réservoir.

7.4.5.2 Comparaisons qualitatives pour la surface libre

On présente ci-dessous les résultats obtenus pour la surface libre à $t=0.4s$ et à $0.56s$. Les figures Fig.7.63 et Fig.7.64 montrent les isosurfaces 0.5 obtenus, comparées aux résultats expérimentaux (sous forme d'images vidéo) et ceux numériques de Kleefsman avant et après l'impact avec l'obstacle. Des comparaisons quantitatives plus exhaustives sont faites dans le prochain paragraphe.

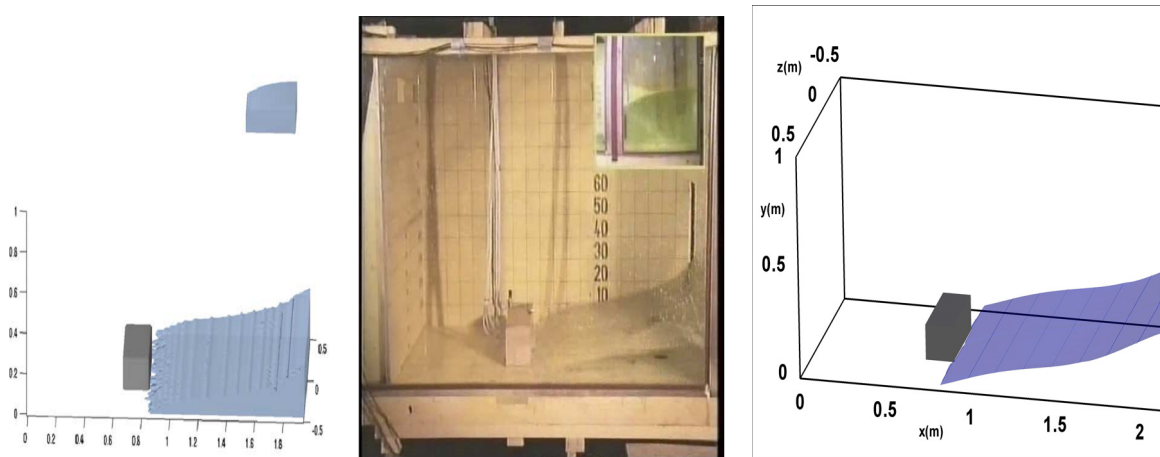


Fig.7.63: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.4s$. Comparaison entre les résultats numériques de Kleefsman (droite), l'expérience (milieu) et la présente simulation.

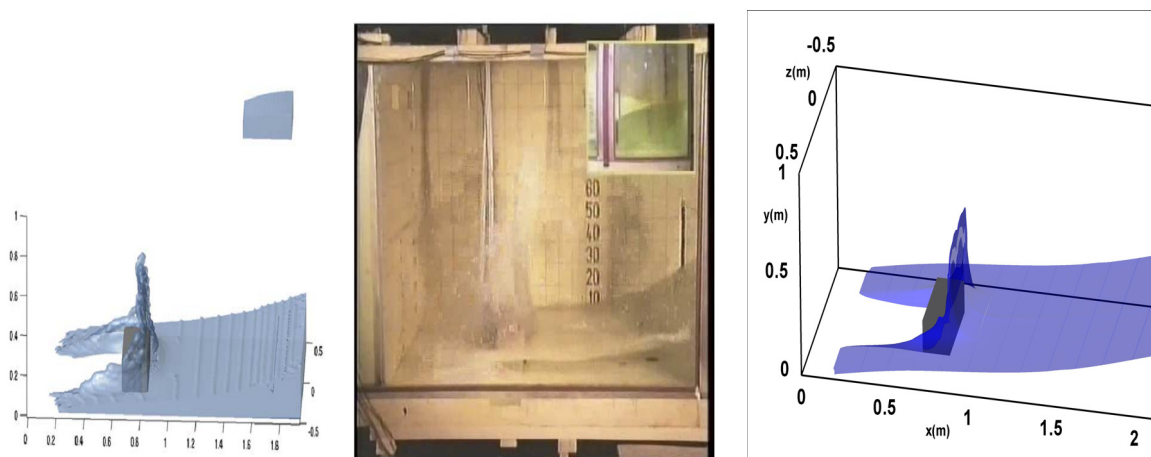


Fig.7.64: Dambreak 3D: Surface libre à $t=0.56s$. Comparaison entre les résultats numériques de Kleefsman (droite), l'expérience (milieu) et la présente simulation.

Les figures (Fig.7.63, Fig.7.64) permettent d'effectuer une comparaison qualitative des deux modèles numériques avec l'expérience. Les deux codes CFD fournissent des résultats très satisfaisants avec une bonne prédiction au niveau des temps et de l'élévation de la surface libre (Fig.7.63, Fig.7.64). Avec un maillage plus grossier de l'ordre de 300.000 mailles, on notait un léger décalage temporel par rapport aux résultats numériques de Kleefsman au début des calculs. A $t=0.56s$, le mouvement de l'eau est entravé par l'obstacle et une langue d'eau rebondit du coin supérieur de l'obstacle en direction du mur opposé (Fig.7.64). La surface libre donnée par notre modèle est beaucoup plus régulière, on note des ondulations sur la surface libre avec les résultats de Kleefsman. Sur ces deux figures, une bonne confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques de Kleefsman peut être observée.

7.4.5.3 Evolution temporelle de la surface libre

Les courbes suivantes Fig.7.65 et Fig.7.66 représentent les évolutions temporelles de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4.

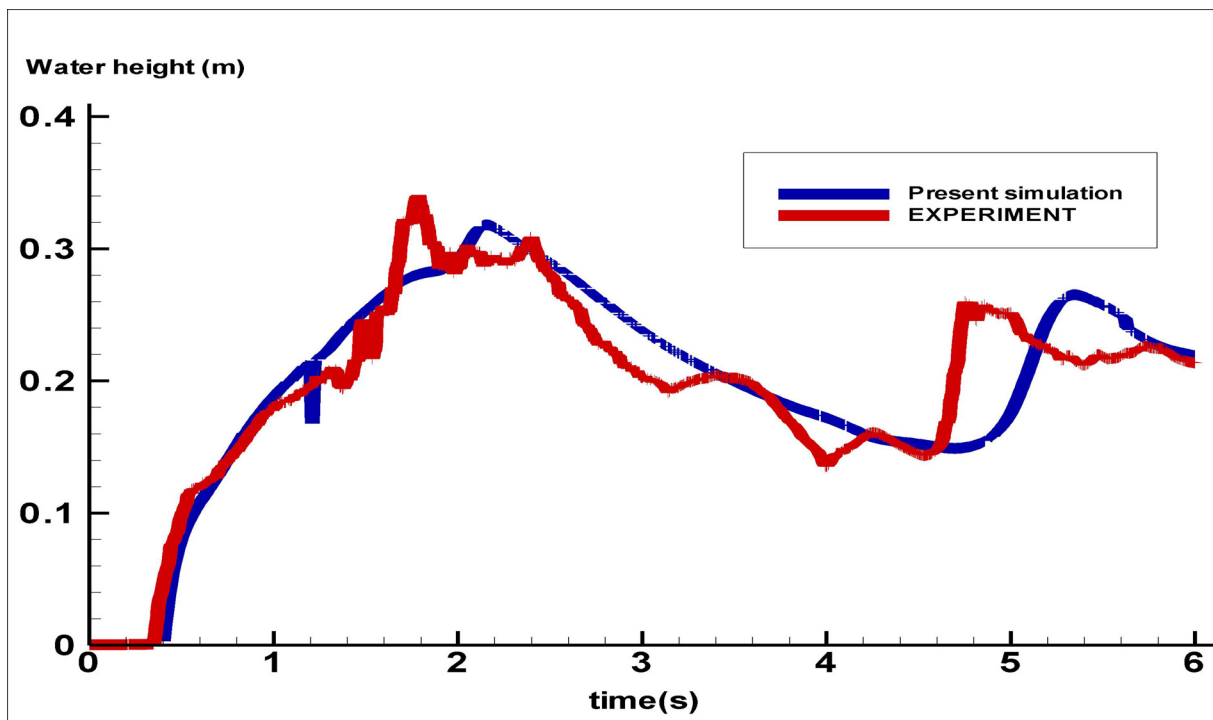


Fig.7.65: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau à la sonde H2. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).

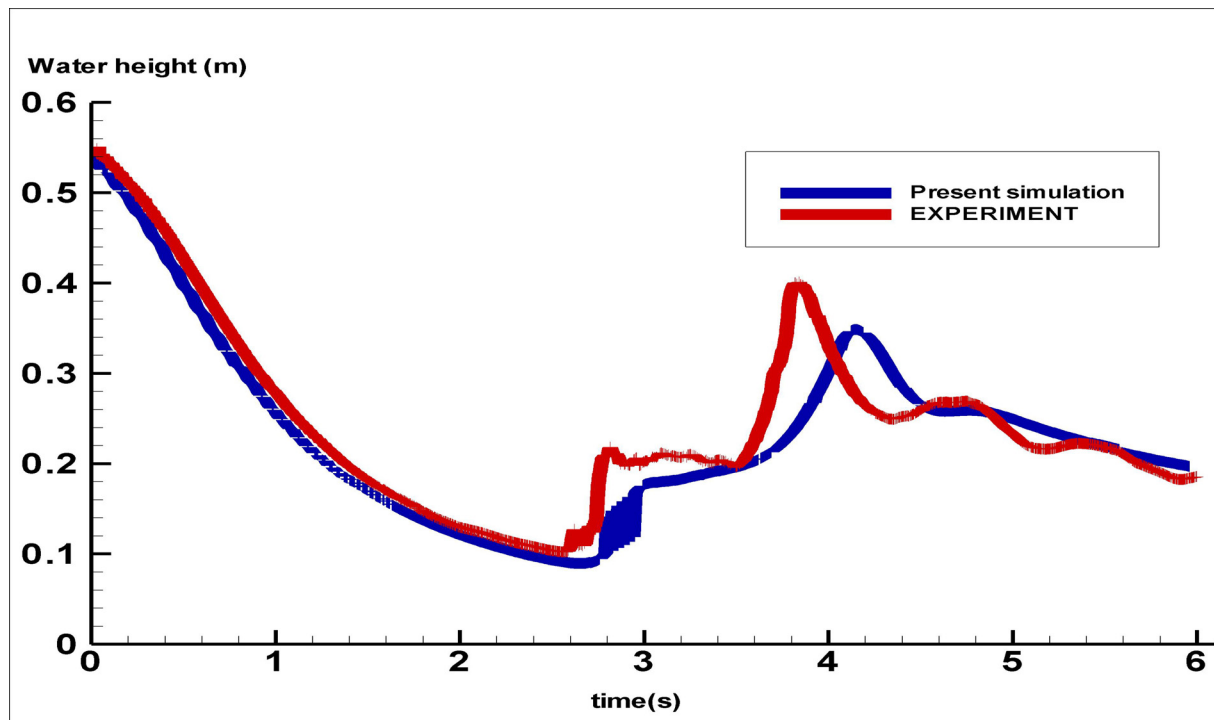


Fig.7.66: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau à la sonde H4.
Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).

Comme la remarque précédente, le modèle donne des résultats très similaires avec l'observation au début de la simulation. Les effets dus aux réflexions ne sont pas encore ressentis.

Après que l'onde se soit réfléchi du mur arrière du domaine de calcul (Fig.7.57), la hauteur du fluide à la sonde H2 atteint son niveau maximal de 0.33m à $t=1.8s$ pour l'expérience et 0.31m à $t=2.1s$ pour la simulation (Fig.7.65). Il faut noter que l'eau impacte cette paroi d'abscisse $x=3.22m$ aux alentours de $t=1s$, ceci peut se voir sur les figures Fig.7.54 et Fig.7.55.

La hauteur de la surface libre augmente à nouveau après la deuxième réflexion sur la paroi opposée $x=0m$ après environ 4s (Fig.7.60). Elle est de 0.25m pour l'expérience et de 0.26m pour la présente simulation (Fig.7.65), ceci montre la capacité de notre modèle à préserver la hauteur de la surface libre. Les valeurs extrêmes sont prédites à 94% comparées à l'expérience. Cependant on peut noter un grand décalage temporel de 0.5s pour le modèle. Le comportement global des résultats des simulations est en accord avec l'expérience malgré ce décalage temporel. On montrera que ce décalage est en partie lié à la vitesse du son artificielle choisie (cf.7.4.7.5).

A la sonde H4 située dans la zone du réservoir, une bonne évolution temporelle de la hauteur d'eau est notée comparée à l'expérience. Du début de la simulation jusqu'à 2.7s, le retour de la vague après son impact avec la paroi de la boîte n'a pas encore perturbé la surface libre. Sans cette perturbation, cette évolution reste organisée (Fig.7.66). Après cet instant, la vague arrive dans la zone près de H4 (Fig.7.58) et crée une première élévation de la surface libre à la sonde H4. Le même phénomène est observé avec le nouveau retournement de la vague après l'impact avec l'autre paroi de la boîte (Fig.7.60).

7.4.5.4 Evolution temporelle de la pression

Les figures Fig.7.67 et Fig.7.68 représentent les évolutions temporelles de la pression dynamique aux sondes P1 et P7.

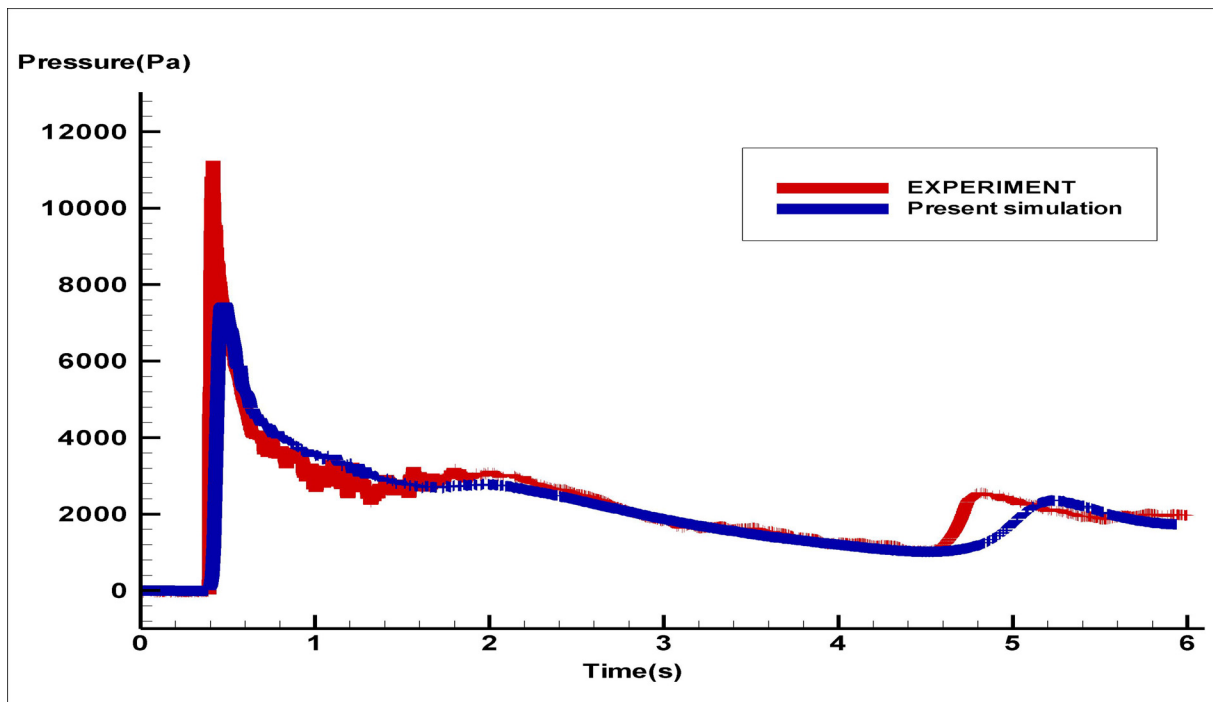


Fig.7.67: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P1. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).

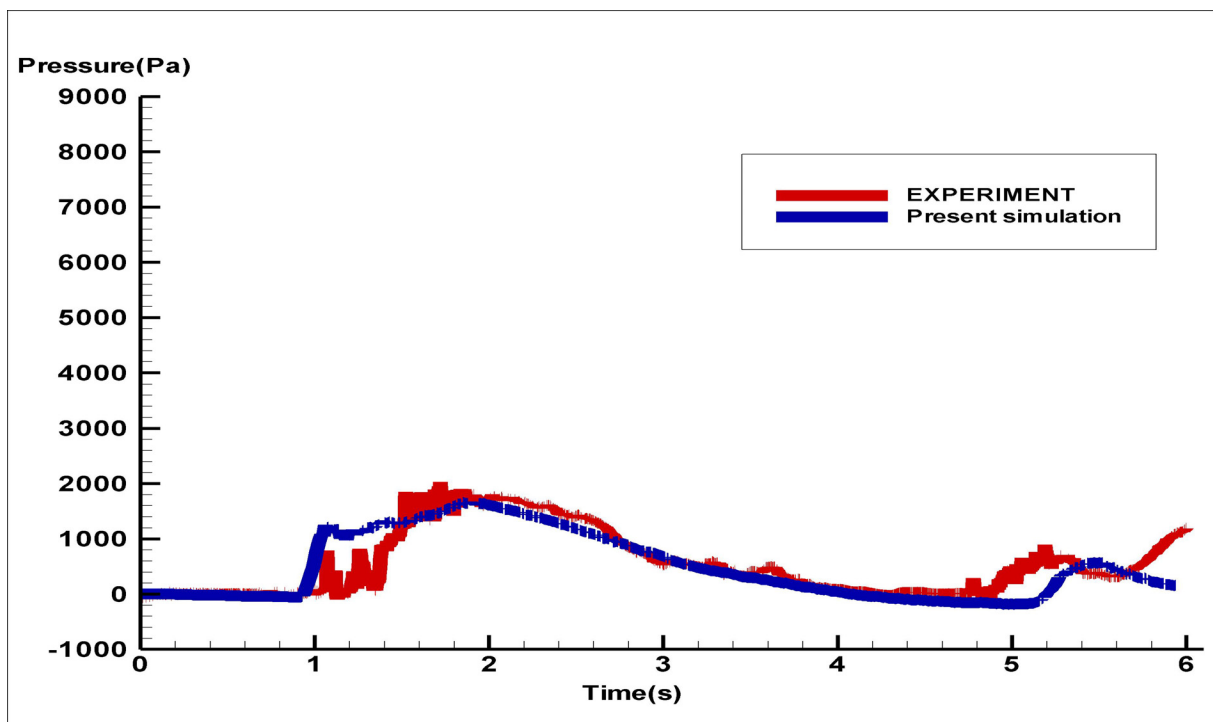


Fig.7.68: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P7. Comparaison de la présente simulation (bleu) avec l'expérience (rouge).

L'instant d'impact où la vague frappe la boîte est correctement prédit par la simulation comme on peut le voir sur la figure (Fig.7.67), cela confirme ce qui a été exposé au paragraphe 7.4.7.2, il est de 0.4s pour l'expérimentation et est de 0.43s pour la simulation. Le solveur prédit cet instant d'impact avec l'obstacle mais a tendance à sous-estimer la valeur maximale de la pression dynamique au pic (Fig.7.67). Les résultats sont très similaires jusqu'à l'instant où l'onde de retour frappe à nouveau l'obstacle. Le code évalue l'amplitude de la pression à 84% avec un décalage temporelle de 0.4s.

Pour la pression à la sonde P7 (Fig.7.68), on remarque une différence entre les résultats de la simulation et ceux issus de l'expérience entre les instants $t=1s$ et $1.5s$. Cette fois ci, la vague touche plus tôt la surface supérieure de l'obstacle (Fig.7.55). Après cet instant le modèle donne de bons résultats jusqu'à la deuxième réflexion de l'onde où on note comme précédemment un décalage au niveau des temps.

Ces résultats permettent de valider et de comparer notre modèle. En effet, on constate une bonne concordance générale entre la simulation numérique et l'expérience tant au niveau des pressions que des hauteurs de surface libre. On attribue les différences entre les résultats numériques et expérimentaux essentiellement à un manque de précision dans la description des obstacles. On note en effet que, avant l'impact avec les trois obstacles (les deux parois du domaine de calcul et l'obstacle placé dans ce domaine), le décalage temporel était de l'ordre de 0.01s et est de l'ordre de 0.4s après les impacts.

Afin d'améliorer la précision des calculs, il serait intéressant d'augmenter la résolution du maillage. En raison du coût CPU d'une telle opération, nous avons cherché à optimiser les résultats à partir du maillage existant. En particulier nous avons étudié la sensibilité du modèle à la vitesse du son artificielle.

7.4.5.5 Sensibilité à la vitesse du son artificielle

Dans leurs travaux sur les modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, Murrone et Guillard ([Murrone, 2003], [Guillard et Murrone, 2004]) réalisent une série de simulations numériques avec des nombres de Mach différents pour le calcul d'écoulements autour d'une aile de NACA0012. Ils montrent que lorsque le nombre de Mach décroît, les résultats se dégradent et les solutions ne convergent pas vers une approximation raisonnable de solution compressible.

Pour s'affranchir de ce problème, dû à des faibles nombres de Mach, ils proposent des schémas de préconditionnement en faisant disparaître toute contribution acoustique et en rajoutant une contribution donnant lieu à une viscosité artificielle. Beaucoup d'auteurs proposent de nouvelles approches, par exemple dans [Wong *et al.*, 2001]. Rappelons aussi que pour des nombres de Mach grands, l'hypothèse d'incompressibilité n'est pas satisfaite: on a des gains en temps de calcul et on perd en physique. L'objectif de cette étude de sensibilité est donc de trouver un compromis entre pertinence physique et coûts de calcul en fonction du nombre du nombre de Mach.

Pour cela, des tests de sensibilité ont été réalisés sur la vitesse du son artificielle pour évaluer son rôle sur la précision des résultats. Cinq valeurs de cette vitesse ont été choisies: 5m/s, 7m/s, 10m/s, 20m/s et 40m/s. Pour des vitesses du son inférieures à 10m/s, on note une certaine instabilité du système après le choc avec l'obstacle. La pression d'impact est plus proche que celle trouvée expérimentalement pour les vitesses du son inférieures à 20m/s. Pour des vitesses de son supérieures à 20m/s, les résultats ne sont pas améliorés et on perd en temps de calcul. Avec une vitesse de 10m/s, on remarque sur la figure Fig.7.69 une bonne qualité des résultats. Le pic de pression à la sonde P1 y est meilleur.

Pour la pression à la sonde P7, la différence entre les résultats de la simulation et ceux issus de l'expérience sur l'intervalle de temps [1; 1.5s], moment où la vague touche la surface supérieure de l'obstacle (Fig.7.55) est mieux prédit avec l'utilisation d'une vitesse de son de 10m/s.

Sur la figure Fig.7.69, on a une comparaison de l'évolution de la hauteur d'eau pour une vitesse de 10m/s et de 20m/s. Les résultats avec 20m/s sont plus précis. Avec une vitesse de 10m/s, on a tendance à surestimer la hauteur de la surface libre, ceci est dû au phénomène de diffusion de l'interface qui y est plus important (on gagne en diffusion). L'interface est plus fine avec une vitesse de 20m/s. On remarque d'une manière générale que le meilleur accord entre la simulation et les expériences semble être obtenu pour une vitesse du son de 10m/s. Ce choix de paramètres numériques permet également un gain en temps de calcul de 1.7.

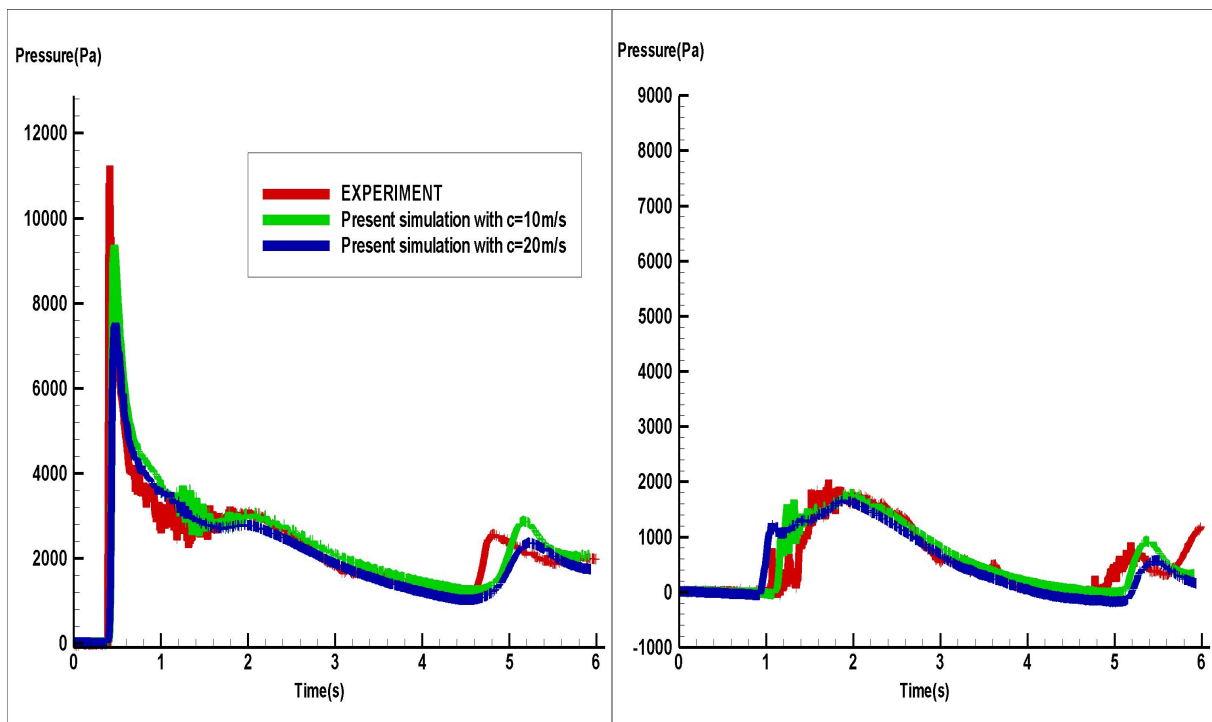


Fig.7.69: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7.

Comparaison de la présente simulation avec l'expérience (rouge). La méthode de compression avec une vitesse de son artificielle de 20m/s est représentée en bleu et en vert pour une vitesse de 10m/s.

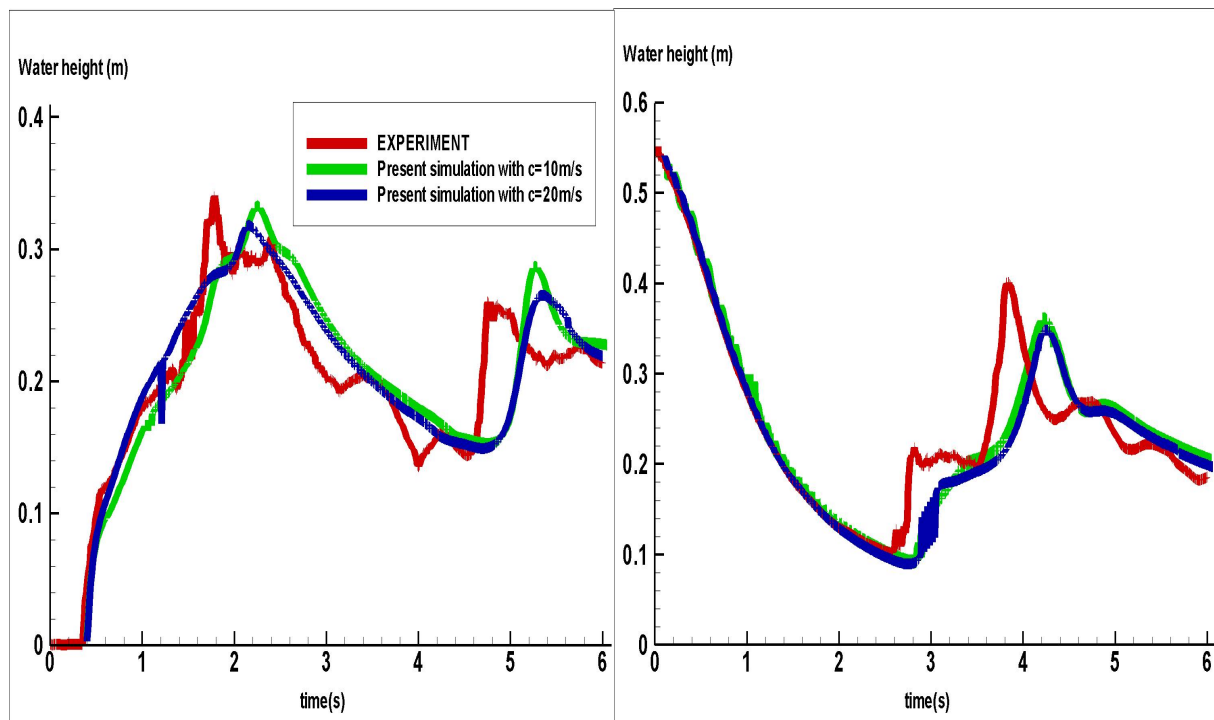


Fig.7.70: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison de la présente simulation avec l'expérience (rouge). La méthode de compression avec une vitesse de son artificielle de 20m/s est représentée en bleu et en vert pour une vitesse de 10m/s.

7.4.5.6 Apport de la compression

On évalue dans cette partie, l'apport de la compression sur ce cas 3D. Les résultats ont été obtenus pour une vitesse de son de 20m/s. Sans la méthode de compression, des vitesses de son inférieures à cette valeur donnent de mauvais résultats.

A première vue, on voit l'importance d'utiliser la technique de raidissement d'interface. Les résultats sont nettement améliorés en particulier aux temps longs. Comme la remarque faite au chapitre 6 sur la validation de cette méthode dans le cas 2D avec la propagation d'une vague, on voit qu'un début de la simulation, pour des temps inférieurs à 3s, les deux modèles donnent des résultats très similaires car le phénomène de diffusion numérique n'est pas encore accentuée. Pour la méthode standard, les pics sont moins prédits à cause d'un phénomène de lissage.

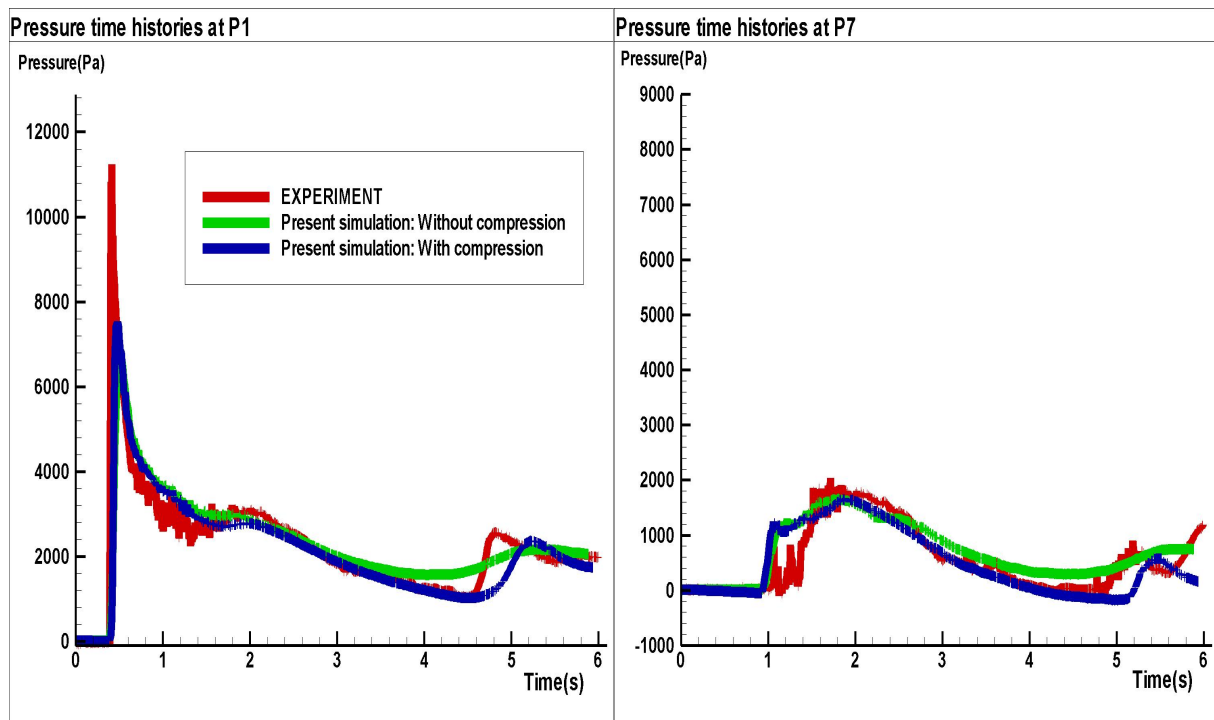


Fig.7.71: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge) et la présente simulation avec compression (bleu) et sans compression (vert).

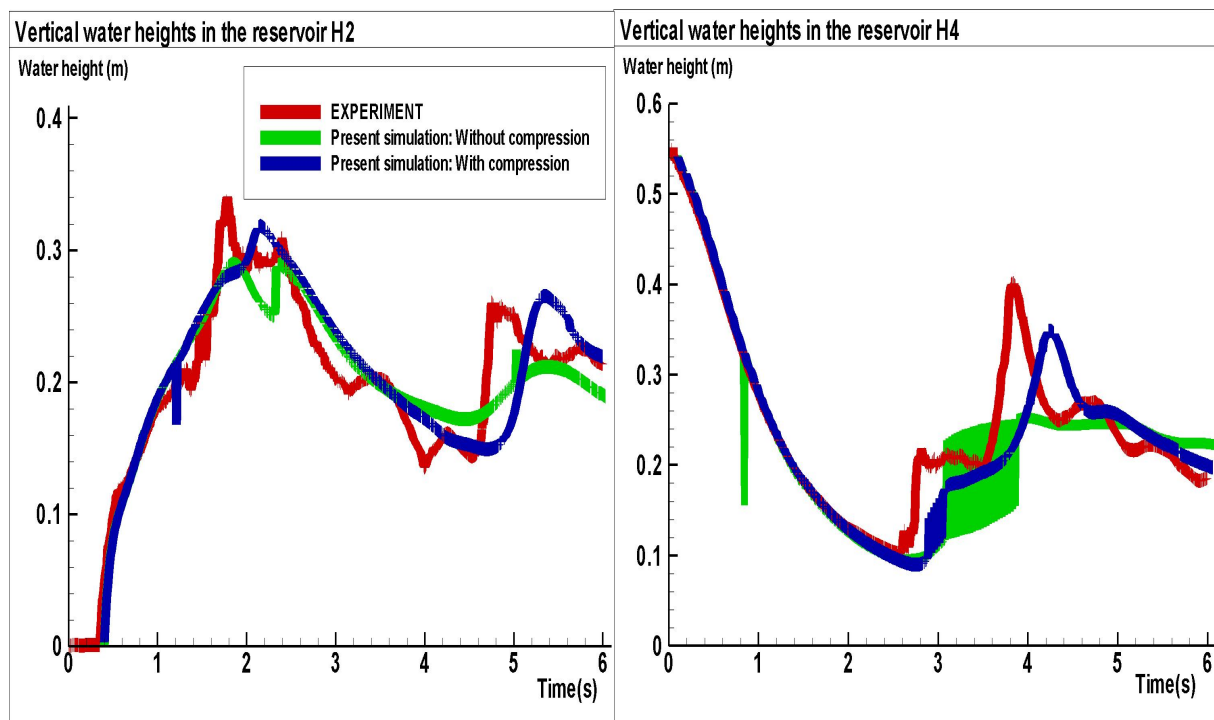


Fig.7.72: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge) et la présente simulation avec compression (bleu) et sans compression (vert).

7.4.5.7 Comparaison avec des codes de laboratoire

Nous présentons et comparons dans cette partie les résultats au cours du temps de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4 et de la pression aux sondes P1 et P7 obtenus avec notre code et ceux obtenus avec le code ComFLOW par Kleffsman et al. [Kleffsman *et al.*, 2005] et avec le code utilisé dans le laboratoire TREFLE de l'université Bordeaux1 par Vincent et al. [Vincent *et al.*, 2010].

Kleffsman utilise un modèle de Navier-Stokes pour un fluide incompressible visqueux, le déplacement de la surface libre est effectué avec une méthode VOF améliorée. Cette amélioration consiste à reconstruire l'interface avec une fonction de hauteur locale définie dans [Gerrits, 2001].

Vincent, quant à lui, utilise une méthode hybride eulérienne lagrangienne basée sur une méthode de suivi d'interface de type VOF-SM (Volume Of Fluid Sub-Mesh method) couplée avec les équations de Navier-Stokes, le lecteur pourra consulter l'article [Vincent *et al.*, 2010] pour plus détails sur ce modèle.

Jusqu'ici on se referait aux mêmes modèles mathématiques et numériques pour faire des comparaisons. Cela était aisé d'autant plus qu'on utilisait exactement les mêmes maillages et les mêmes paramètres physiques. Cette comparaison devient difficile si ces modèles présentent une certaine différence. L'objectif de cette partie est donc de faire une évaluation des résultats de notre modèle par rapport aux deux résultats de références de Kleffsman et de Vincent. Dans un futur proche, des benchmarks seront intéressants dans le but d'améliorer les performances numériques de ces outils de simulation.

Les figures suivantes présentent les comparaisons entre la présente simulation et les résultats de Kleffsman (Fig.7.73, Fig.7.74) et ceux de Vincent (Fig.7.75, Fig.7.76). Comparé aux résultats de Kleffsman, la présente simulation prédit bien les sauts de la surface libre (Fig.7.73, $t=2s$ et $5s$, courbe droite) avec des valeurs qui sont plus proches de l'expérience. Elle présente un certain retard temporel comme illustré dans les paragraphes précédents. Au niveau de la pression, le modèle de Kleffsman donne des résultats meilleurs avec une certaine instabilité. Au niveau de la sonde P7, les modèles ne prédisent pas assez l'instant du rebondissement (Fig.7.74 à $t=1s$, droite) de l'eau sur la partie supérieure de l'obstacle. On a montré précédemment qu'avec le choix d'une vitesse de son de $10m/s$, notre modèle fournit de bons résultats à cet instant (Fig.7.69). On note un bon accord entre ces deux modèles.

On note sur les figures Fig.7.75 et Fig.7.76 qui permettent de comparer la présente simulation avec les résultats de Vincent. Les résultats sont très similaires dans l'ensemble. On note que les simulations de Vincent décrivent mieux le pic de pression à l'impact alors que notre modèle est plus proche des expériences dans la description de l'onde de retour.

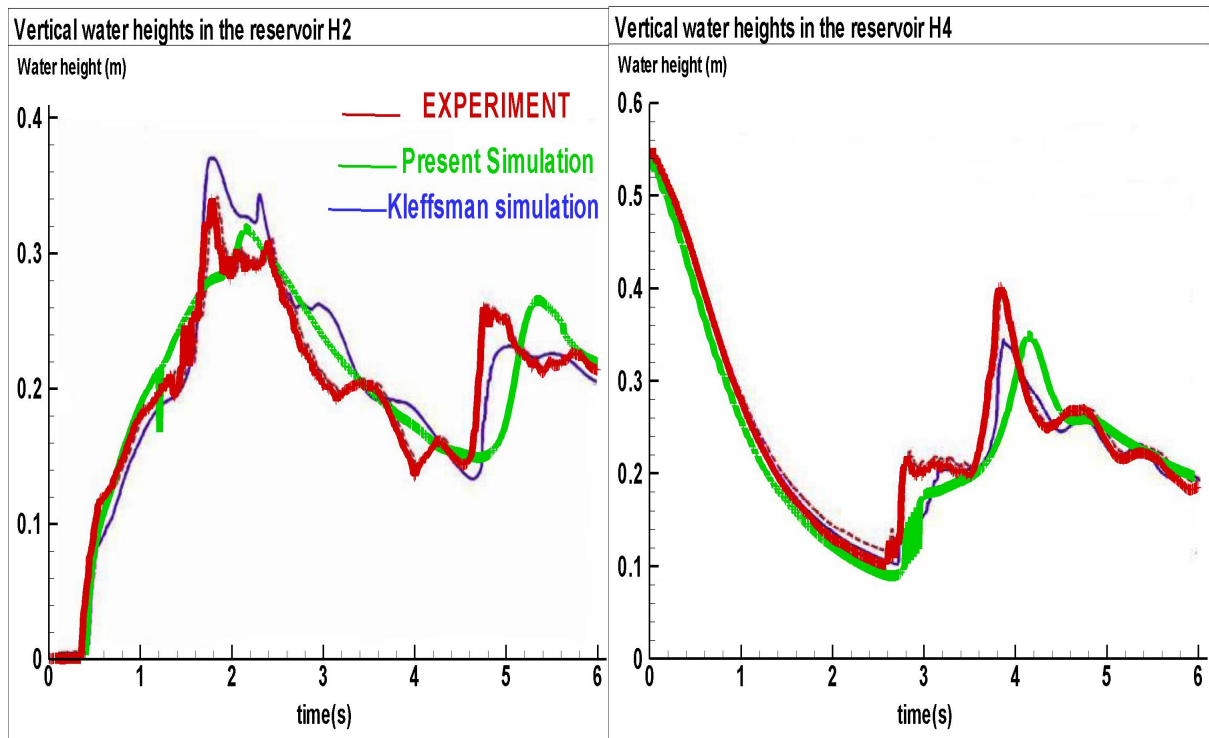


Fig.7.73: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Kleffsman (bleu) et la présente simulation (vert).

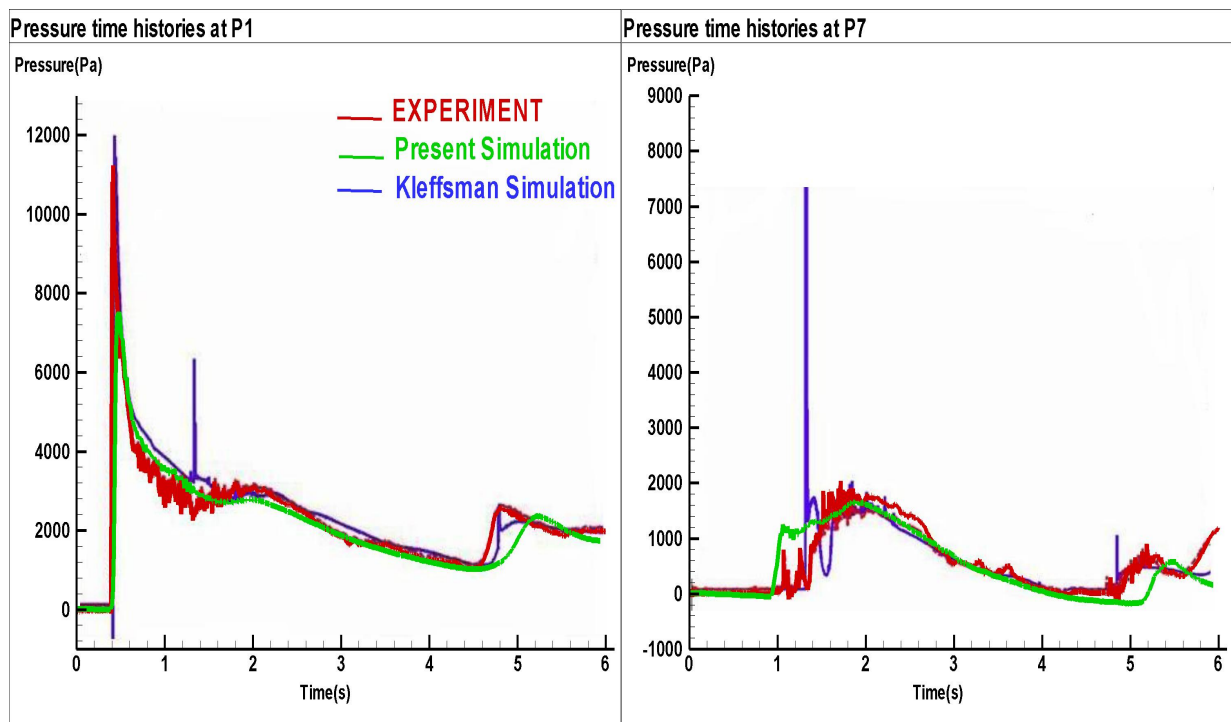


Fig.7.74: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Kleffsman (bleu) et la présente simulation (vert).

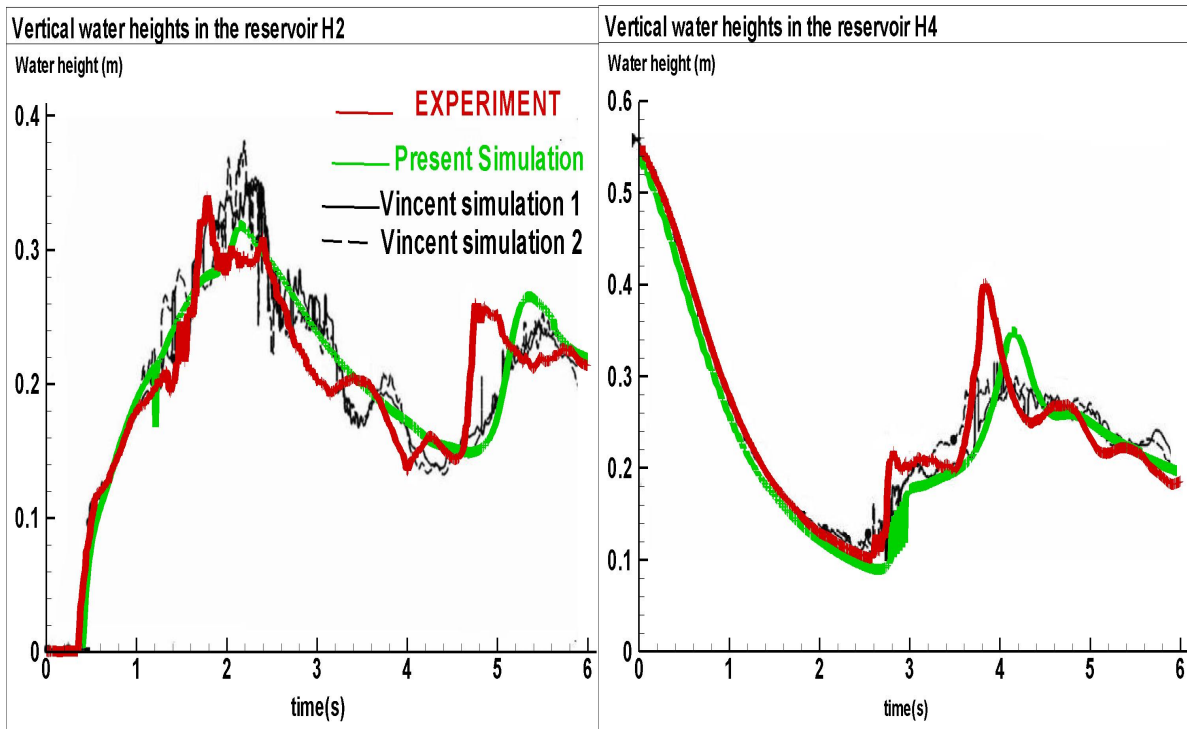


Fig.7.75: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Vincent (noire) et la présente simulation (vert).

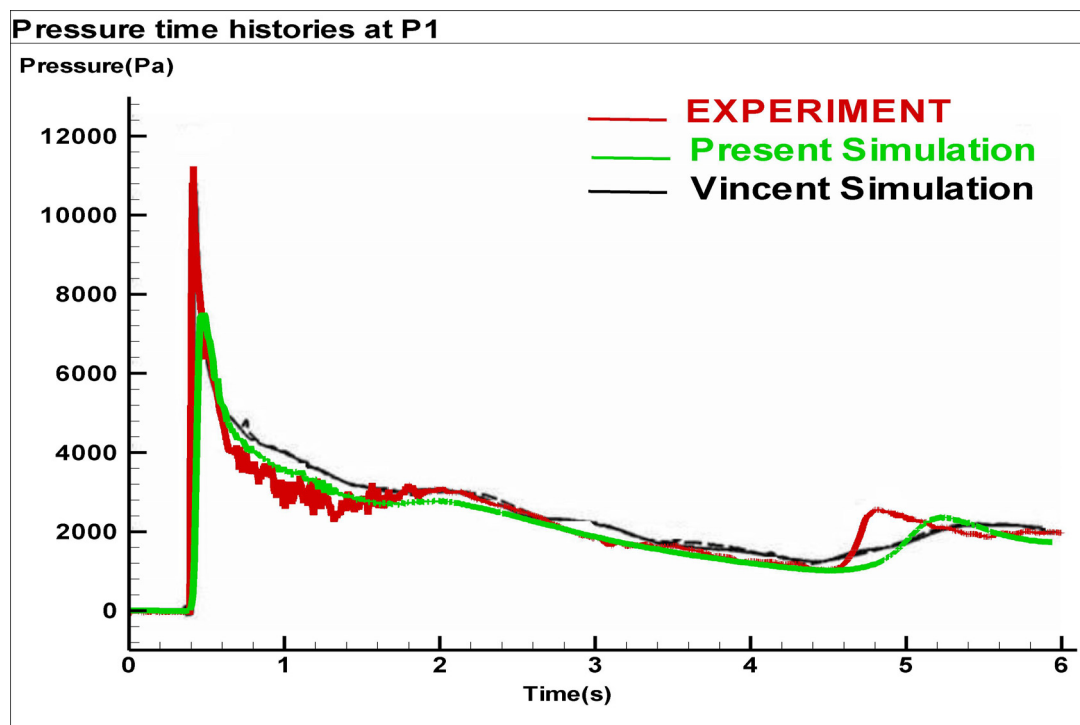


Fig.7.76: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression à la sonde P1. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques de Vincent (noire) et la présente simulation (vert).

7.4.5.8 Conclusion

Des résultats de validation du code ont été présentés. Les résultats expérimentaux de référence sont des résultats publiés dans l'article [Kleefsman *et al.*, 2005]. La configuration testée concerne le cas du dambreak 3D. Sur cette application réputée difficile, du fait notamment de la nécessité d'une modélisation fine de la surface libre, le code présente un très bon niveau de validation. Il reproduit avec succès les principales caractéristiques observées de la dynamique du déferlement et de l'impact avec l'obstacle. Il dispose donc d'un bon modèle bi fluide de bonne précision lui permettant de représenter des phénomènes physiques fins. Les premiers résultats obtenus avec le modèle Euler bi-fluide donnent des résultats satisfaisants avec un niveau de précision comparable à celui des outils numériques existants. Pour la prochaine étape, une comparaison avec des codes industriels sera effectuée.

Conclusion générale et perspectives

On a étudié au cours de cette thèse l'analyse et l'approximation des écoulements bi-fluides eau-air et leurs interactions avec des structures. Ces études concernaient le déferlement de vagues 2D et 3D avec des macro-rugosités et de barrage 3D en présence d'obstacle.

La méthode repose sur un modèle numérique d'écoulement compressible d'Euler bi-fluide à faible Mach. Le modèle d'Euler bi-fluide à faible Mach conduit à un système hyperbolique de lois de conservation permettant d'utiliser des méthodes classiques de résolution du type volumes finis et de réduire les temps de calcul par rapport aux méthodes de Navier-Stokes en négligeant les effets visqueux. Une approximation par volumes finis avec un schéma de Godunov du second ordre en temps et en espace est utilisée dans ce code.

Pour modéliser l'interface entre l'eau et air dans le cas bi-fluide, l'ensemble des fluides en présence est considéré comme un seul milieu continu. L'évolution de cette interface, considérée comme une zone de diffusion numérique, est décrite par une équation de convection et on ne dispose pas de méthode de reconstruction ou de suivi d'interface.

La structure de ce système est relativement simple. Pour un bon couplage entre les deux fluides, des lois de fermeture pour la pression avec une approche de compressibilité artificielle basée sur une approche à faible Mach sont utilisés.

Ce modèle numérique a été amélioré, lors de cette thèse, par l'introduction d'une méthode de compression de l'interface et une gestion multi-échelle des pas de temps locaux avec un schéma d'Adams-Bashforth. Cette modification de la technique d'intégration en temps du solveur avec cette approche multi-échelle a permis de garder la précision des résultats avec une précision du second ordre et avec des temps de calcul meilleurs.

La deuxième méthode étudiée lors de cette thèse est celle de la compression d'interface. L'introduction de cette méthode permettait une meilleure précision des résultats, l'interface y est mieux décrite et on a moins de diffusion.

Les tests effectués sur un cas du tube à choc et sur le cas d'une propagation d'onde ont montrés l'efficacité de ces deux méthodes. Ces méthodes numériques ont été aussi validées avec des mesures expérimentales dans le cas d'un déferlement 2D et de la rupture 3D de barrage avec obstacle. Des comparaisons expérimentales et numériques ont permis de constater la pertinence des développements apportés au logiciel avec une amélioration conséquente de la précision des résultats et une diminution des temps de calcul.

Avec le cas du dambreak 3D, on a vu que le code présente un très bon niveau de validation. Il reproduit avec succès toutes les principales caractéristiques observées de la dynamique du déferlement et de l'impact avec l'obstacle. Cela démontre l'adaptabilité de ce modèle Euler bi-fluide à traiter les écoulements bi-fluides avec de grandes distorsions de l'interface.

Les comparaisons de nos résultats avec deux codes de laboratoires reposants sur des approches pertinentes tels que le code ComFLOW et le code utilisé dans le laboratoire TREFLE viennent renforcer cette conclusion.

Un autre objectif de thèse était de comprendre l'influence des macro-rugosités ou structures sur la dynamique du déferlement. Une étude paramétrique a été proposée. Les tendances générales de cette influence des macro-rugosités sur le déferlement d'une onde solitaire ont mis en évidence deux paramètres de normalisation que sont l'amplitude du soliton et la

distance de séparation des rugosités. Des effets significatifs ont été observés. Les principales effets sont l'avancée du point de déferlement, les déformations importantes autour des macro-rugosités jusqu'à la surface libre, la forte perturbation des cycles successifs de l'impact/splash-up/rebonds et l'éventuelle diminution de la distance du "run-up". Ce travail qui est une première approche pourrait être poursuivi et serait très intéressant pour des études d'optimisation des paramètres des systèmes de défense.

Des perspectives concernant ce modèle bi-fluide faible Mach peuvent être proposées.

Tout d'abord, il s'agirait d'une étude sur la vitesse du son artificielle. Les travaux effectués sur l'influence de ce paramètre important dans notre modèle pour le calcul de la pression ont montré la nécessité de poursuivre une telle étude. Cette dernière permettrait de mieux optimiser le choix de cette vitesse artificielle. Des vitesses de son artificielle proche de l'écoulement ($Mach=0.5$) donnent des résultats très similaires et parfois meilleurs comparé à des Mach plus faibles. Pour des nombres de Mach faibles, les pressions aux impacts sont sous-estimées et un retard temporel est observé. Ces deux phénomènes sont améliorés de manière générale avec des Mach plus grands. Une étude de sensibilité détaillée reste à faire afin d'optimiser ce choix.

Comme dans l'approche multi-échelle reposant sur un critère géométrique, une autre approche 'multi-vitesse' pourrait être faite. Précédemment une vitesse de son artificielle était utilisée pour avoir des faibles nombre de Mach. Cette vitesse ne varie pas pendant toute la simulation et toutes les cellules ont la même valeur. Souvent dans les simulations, comme par exemple les déferlements de vagues ou l'impact d'une onde sur un obstacle, les grandes vitesses sont souvent très locales. Pour les cellules de grandes vitesses, la vitesse du son devrait être importante et plus faible pour les cellules où la vitesse de l'écoulement est faible. L'idée serait de fixer un nombre de Mach au départ de la simulation et adapter la vitesse du son par rapport à la vitesse de l'écoulement pour chaque cellule. Loin d'ignorer les problèmes de consistance d'une telle approche, les cellules pourront être regroupées en paquet comme dans l'approche multi-échelle. Cette gestion astucieuse des vitesses locales pourrait permettre des gains en temps de calcul avec une meilleure précision.

Ces premiers résultats sont encourageant pour poursuivre cette démarche vers le développement de techniques de raffinement de maillages dynamiques couplées à la méthode multi-échelle. Un travail mené par Golay et Yushchenko [Golay et Yushchenko, 2011] est en cours. Cette technique de raffinement dynamique de maillage permettrait encore des gains conséquents en temps de calcul.

Une voie alternative de fermeture de la pression avec des lois de mélange serait intéressante, l'utilisation de ces types de modèles donne des résultats probants, par exemple dans [Plumerault, 2009].

On rappelle que dans ce modèle, la turbulence et les effets visqueux ne sont pas pris en compte et on ne dispose pas de méthodes de suivis ou de reconstruction d'interface. Cependant ce modèle présente un très bon compromis entre coûts de calcul et pertinence physique et permet de représenter des phénomènes physiques fins en 3D comme dans le cas du Dambreak 3D.

Références bibliographiques

Abgrall R., How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi-conservative approach, *Journal of Computational Physics*, 125(1), 150-160, 1996.

Adalsteinsson D. and Sethian J. A., The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods, *Journal of Computational Physics*, 148, 2-22, 1999.

Aliabadi S., and Tezduyar T.E., Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(3-4), 243-261, 2000.

Allahviranloo T., Ahmady N. and Ahmady E., Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method, *Information Sciences*, 177, 1633-1647, 2007.

Allaire G., Clerc S. and Kokh S., A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids, *Journal of Computational Physics*, 181, 577-616, 2002.

Altmann C., Belat T., Gutnic M., Helluy P., Mathis H., Sonnendrücker E., Angulo W. and Hérard J-M., A local time-stepping discontinuous Galerkin algorithm for the MHD system, *ESAIM*, 28, 33-54, 2009.

Anderson D. M. and McFadden G. B., Diffuse-interface methods in fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, 139-65, 1998.

Andrianov N., Coquel F., Postel M. and Tran Q.H, A relaxation multiresolution scheme for accelerating realistic two-phase flows calculations in pipelines, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 54(2), 207-236, 2007.

Baer M. R and Nunziato J. W., A two phase mixture theory for the deflagration to detonation transition in reactive granular materials, *Int. J. Multiphase Flow*, 12(6), 861-889, 1986.

Barberon T., Modélisation mathématique et numérique de la cavitation dans les écoulements multiphasiques compressibles, Thèse, Université de Toulon et du Var, Toulon, France, 2000.

Basset O., Simulation numérique d'écoulements multi fluides sur grille de calcul, Thèse, l'École des Mines de Paris, Paris, France, 2006.

Batkam S., Thermique multidomaine en simulation numérique du remplissage 3D, thèse, Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris, Paris, France, 2002.

Battjes J. A., Surf-zone dynamics, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20, 257-293, 1988.

Benteboula S., Résolution des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach: Application à l'étude de l'anneau de vorticit   à masse volumique variable, th  se, universit   de Marne-la-Vall  e, Paris, France, 2006.

Berthon C., Stability of the MUSCL schemes for the Euler equations, *Comm. Meth. Sci.*, 3, 133-158, 2005.

Berthon C., Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes, *Journal of Computational Physics*, 218, 495-509, 2006.

Biausser B., suivi d'interface tridimensionnel de type Volume of Fluid: application au déferlement, Thèse, Université de Toulon et du Var, Toulon, France, 2003.

Biausser B., Guignard S., Marcer R. and Fraunié P., 3D two phase flows numerical simulations by SL-VOF method, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 45(6), 581-604, 2004.

Bonometti T. and Magnaudet J., An interface-capturing method for incompressible two-phase flows, Validation and application to bubble dynamics, *International Journal of Multiphase Flow*, 33, 109-133, 2007.

Braconnier B., Hu J. J., Niu Y. Y, Nkonga B. and Shyne K. M., Numerical simulation of low Mach compressible two-phase flows: preliminary assessments of some basic solution techniques, 28, 117-13, 2009.

Buffard T., Gallouet T. and Herard J. M., A sequel to a Rough Godunov Scheme: Application to Real Gases, *Computers and Fluids*, 29, 673-709, 2000.

Bulgarelli U. P., Lugni C. and Landrini M., Numerical modelling of free-surface flows in ship hydrodynamics, *Intl. J. Num. Meth. Fluids*, 43, 465-481, 2003.

Bullock G. N., Crawford A. R, Hewson P. J., Walkden M. J. A. and Bird P. A. D., The influence of air and scale on wave impact pressures, *Coastal Engineering*, 42(4), 291-312, 2001.

Bullock G. N., Obhrai C., Peregrine D. H. and Bredmose H., Violent breaking wave impacts, Part 1: Results from large-scale regular wave tests on vertical and sloping walls, *Coastal Engineering* 54, 602-617, 2007.

Burden R. L and Faires J. D, *Numerical Analysis*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.

Caleyron F., Combescure A., Faucher V. and Potapov S., Une méthode sans maillage pour la modélisation des interactions fluide-structure: application à la rupture d'un réservoir sous impact, 10e Colloque National en Calcul des Structures, Var, France, 2011.

Cassidy D. A., Edwards J. R. and Ming Tian, An investigation of interface-sharpening schemes for multi-phase mixture flows, *Journal of Computational Physics*, 228, 5628-5649, 2009.

Celebi M. S., Kim M. H. and Beck R. F., Fully nonlinear 3D numerical wave tank simulation, *J. Ship Res.*, 42 (1), 33-45, 1998.

Chanteperdrix G., Villedieu P. and Vila J. -P., A compressible model for separated two-phase flows computations, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Canada, July 2002.

Chanteperdrix G., Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de

véhicules spatiaux. Thèse, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, France, 2004.

Chen X., A Cartesian method for fitting the bathymetry and tracking the dynamic position of the shoreline in a three-dimensional, hydrodynamic model, *Journal of Computational Physics*, 200, 749-768, 2004.

Chorin A. J., A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics*, 2, 12- 26, 1967.

Cho Y. S., Park K. Y. and Lin T. H., Run-up heights of nearshore tsunamis based on quadtree grid system, *Ocean Engineering*, 31, 1093-1109, 2004.

Christensen E. D., Jensen J. H. and Mayer S., Sediment transport under breaking waves, *Proc. 27th Int. Conf. on Coastal Engineering*, ASCE, Sydney, Australia, 2467-2480, 2000.

Christensen E. D. and Deigaard R., Large eddy simulation of breaking waves, *Coastal Engineering*, 42, 53-86, 2001.

Christensen E. D., Large eddy simulation of spilling and plunging breakers, *Coastal Engineering*, 53, 463-485, 2006

Cockburn B. and Shu C. W., Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, *Journal of Scientific Computing*, 16(3), 173-261, 2001.

Cohen A., Kaber S. M. and Postel M., Multiresolution analysis on triangles: application to conservation laws, in Benkhaldoun F., Vielsmeier R. and Hanel D., *Finite Volumes for Complex Applications II*, 841-848, Hermes, Paris, 1999.

Cohen A., Kaber S. M., Muller S., and Postel M., Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws, *Math. Comp.*, 72 (241), 183-225, 2003.

Coquel F., El Amine K., Godlewski E., Perthame B., and Rascle P., A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, 136, 272-288, 1997.

Coquel F., Postel M., Poussineau N. and Tran Q.H., Multiresolution technique and explicit-implicit scheme for multicomponent flows, *J. Numer. Math.*, 14(3), 187-216, 2006.

Coquel F., Nguyen Q.L, Postel M. and Tran Q.H., Local time stepping applied to implicit-explicit methods for hyperbolic systems, *Multiscale Model Simulation*, 8 (2), 540-570, 2010.

Cooker M.J., Peregrine D.H., C. Vidal C. and Dold J., The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder, *J. Fluid Mech.*, 215, 1-22, 1990.

Coupez T., Basset O., Silva L. and Digonnet H., Adaptive Capturing methods for moving surfaces and interfaces in material forming, 7th World Congress on Computational Mechanics, Los Angeles, California, USA, 2006.

Crespo A. J. C., Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free-surface hydrodynamics, Thèse, Université de Vigo, Espagne, 2008.

David L. G., Finite Volume Methods and Adaptive Refinement for Tsunami Propagation and Inundation, thèse, University of Washington, USA, 2006.

De Jouette C., Laget O., Le Gouez J.-M. and Viviand H., A dual time stepping method for fluid- structure interaction problems, *Comput. Fluids*, 31, 509- 537, 2002.

Dommermuth D. G., Yue D. K. P., Lin W. M., R. J., Chan E. S. and Melville W. K., Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech*, 189, 423-442, 1988.

Dutykh D., Modélisation mathématique des tsunamis, Ecole normale supérieure de Cachan, Paris, France, 2007.

Dutykh D. and Mitsotakis D., On the relevance of the dam break problem in the context of nonlinear shallow water equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 13(4), 799-818, 2010.

Dutykh D., Poncet R. and Dias F., The VOLNA code for the numerical modelling of tsunami waves: generation, propagation and inundation, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, In press, 2011.

Duval M., Etude du déferlement d'une onde de Stokes et de la dissipation associée par simulation directe, thèse, Institut N. Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2007.

Epicuma S., Dewals B. J., Archambeau P. and Pirotona M., Dam break flow computation based on an efficient flux vector splitting, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 2143-2151, 2010.

Faccanoni G., Kokh S. and Allaire G., Numerical Simulation with Finite Volume of Dynamic Liquid-Vapor Phase Transition, *Finite Volume for Complex Applications V*. ISTE and Wiley, 391-398, 2008.

Faltinsen O. M., Numerical solution of transient nonlinear free surface motion outside or inside moving bodies, In: *Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Berkeley, CA., 347-357, 1977.

Fang J., Parriaux A., Rentschler M. and Ancey C., Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids, *Applied Numerical Mathematics*, 59(2), 251-271, 2009.

Fernando H., Samarawickrama S., Balasubramanian S., Hettiarachchi S. and Voropayev S., Effects of porous barriers such as coral reefs on coastal wave propagation, *J. Hydro-viron. Res.*, 1, 187-194, 2008.

Ferrant P., Radiation and diffraction of nonlinear waves in three dimensions, In: *Proc. 7th Int. Conf. on Behaviour of Offshore Structures*, MIT, USA, 507-524, 1994.

Fuhrman D. R. and Madsen P. A., Simulation of nonlinear wave run-up with a high-order Boussinesq model, *Coastal Engineering*, 55, 139-154, 2008.

Fürst J., and Kozel K., Second and third order weighted ENO scheme on unstructured Meshes, In *Finite volumes for complex applications*, 3, 723-730, Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille., 2002.

- Fuster D., Agbaglah G., Josserand C., Popinet S. and Zaleski S., Numerical simulation of droplets, bubbles and waves: state of the art, *Fluid Dyn. Res.*, 41 (6), 2009.
- Gallegos H. A., Schubert J. E. and Sanders B. F., Two-dimensional, high-resolution modeling of urban dam-break flooding: a case study of Baldwin Hills, California, *Adv Water Res*, 32, 1323-35, 2009.
- Gallouet T., Herard J. M. and Seguin N., Some approximate Godunov schemes to compute shallow water equations with topography, *Computers and Fluids*, 32, 479-513, 2003.
- Gerrits J., Dynamics of liquid-filled spacecraft, Ph.D. Thesis, University of Groningen, Netherlands, 2001.
- Gingold R. A. and Monaghan J. J., Smoothed particle hydrodynamics theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.*, 181, 375-389, 1977.
- Giovanni F., Shoreline tracking and implicit source terms for a well balanced inundation model, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63(10), 1123-1146, 2010.
- Glimm J., Saltz D. and Sharp D. H, Two phase flow modelling of a fluid mixing layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 378, 119-143, 1999.
- Godlewski E. and Raviart P. A., Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, *Applied Mathematical Sciences*, 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- Golay F. and Helluy P., Numerical schemes for low Mach wave breaking, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21(2), 69-86, 2007a.
- Golay F. and Helluy P., Déferlement de vague par un schéma faible Mach, 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007b.
- Golay F., Numerical entropy production and error indicator for compressible flows, *C.R. Mécanique*, 337 (4), 233-237, 2009.
- Golay F., Yushchenko L., An Adaptive multi-scale scheme for compressible flows, *C.R. Mécanique*, soumis, 2011.
- Gomez-Gesteira M. and Dalrymple R. A., Using a 3D SPH Method for Wave Impact on a tall Structure. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130(2), 63-69, 2004.
- Greaves D., A quadtree adaptive method for simulating fluid flows with moving interfaces, *Journal of Computational Physics*, 194, 35-56, 2004.
- Grilli S., Skourup J. and Svendsen I., An efficient boundary element method for nonlinear water waves, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(2), 97-107, 1989.
- Grilli S., Svendsen I. and Subramanya R., Breaking criterion and characteristic for solitary waves on slopes, *J. Waterway, Port, Coast. And Oc. Engineering*, 123(6), 374-391, 1997.
- Grilli S., Guyenne P. and Dias F., A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 35, 829-867, 2001.

Guignard S., Grilli S. T., Marcer R. and Rey V. , Computation of shoaling and breaking waves in nearshore areas by the coupling of BEM and VOF methods, In Proc. 9th Offshore and Polar Eng. Conf. (ISOPE99), Brest, France, 3, 304-309, 1999.

Guignard S., Marcer R., Rey V., Kharif C. and Fraunié P., Solitary wave breaking on sloping beaches: 2-D two phase flow numerical simulation by SL-VOF method, Eur. J. Mech. B. Fluids, 20, 57-74, 2001.

Guillard H., Murrone A., on the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit: II. Godunov type schemes, Computers and Fluids, 33, 655-675, 2004.

Guillemaud V., Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bi fluide à deux pressions, Thèse, Université de Provence, Marseille, 2007.

Hairer E., Norsett S. P. and Wanner G., Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems (2nd ed.), Berlin: Springer Verlag, ISBN 978-3-540-56670-0, 1993.

Hamm L., Madsen P. and Peregrine D., Wave transformation in the near-shore zone: a review, Coastal Engineering, 21, 5-39, 1993

Harlow F. H. and Welch J. E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Phys. Fluid, 8, 2182-2189, 1965.

Harten A., The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. I. Single conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., 611-638, 1977.

Helluy P., Golay F., Caltagirone J. P., Lubin P., Vincent S., Drevrard D., Marcer R., Fraunié P., Seguin N., Grilli S., Lesage A.N., Dervieux A. and Allain O., Numerical simulation of wave breaking, 39(3), 591-607, 2005.

Helluy P., Simulation numérique des écoulements Multiphasiques: de la théorie aux applications, Habilitation à diriger des recherches, Université du Sud Toulon Var, La Garde, 2005.

Hibberd S. and Peregrine D. H., Surf and run-up on a beach: a uniform bore, Journal of Fluid Mech., 95, 323-345, 1979.

Hirt C.W. and Nichols B.D., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, Journal of Computational Physics, 39, 201-255, 1981.

Horrillo J., Kowalik Z. and Shigihara Y., Wave dispersion study in the India Ocean Tsunami of decembre 26, 2004, science of Tsunami Hazards, 25(1), 42-62, 2006.

Issa R. and Violeau D., SPH European Research Interest Community SIG, 3D dambreaking, 2006.

Kaceniauskas A., Development of Efficient Interface Sharpening, Procedure for Viscous Incompressible Flows, Informatica, 19(4), 487-504, 2008.

Kapila A. K., Son S. F, Bdzil J. B, Meniko R., and Stewart D. S., Two-phase modeling of DDT: Structure of the velocity-relaxation zone, Phys. Fluids, 9, 3885-3897, 1997.

- Kapila A. K., Menikoff R., Bdzil J. B., Son, S. F. and Stewart D. S., Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations, *Physics of Fluids*, 13(10), 3002-3024, 2001.
- Karni S., Multi-component flow calculations by a consistent primitive algorithm, *Journal of Computational Physics*, 112, 31-43, 1996.
- Khayyer A. and Gotoh H., Enhanced predictions of wave impact pressure by improved incompressible SPH methods, *Appl. Ocean Res.*, 31 (2), 111-131, 2009.
- Kimmoun O. and Branger H., A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, 588, 353-397, 2007.
- Kirkgöz M. S., Breaking wave impact on vertical and sloping coastal structures, *Ocean Engineering*, 22(1), 35-48, 1995.
- Kirkgöz S. and Mamak M., Impulse modelling of wave impact pressures on vertical wall, *Ocean Engineering*, 31(3-4), 20, 343-352, 2004.
- Kirkgöz M. S. and Aköz M. S., Geometrical properties of perfect breaking waves on composite breakwaters, *Ocean Engineering*, 32(16), 1994-2006, 2005.
- Klainerman S. and Majda A., Singular perturbation of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, *Communication on pure and applied mathematics*, 34, 481-524, 1981.
- Klainerman S. and Majda A., Compressible and incompressible fluids, *Communication on pure and applied mathematics*, 35, 629-651, 1982.
- Kleefsman K. M. T., Fekken G., Veldman A. E. P., Iwanowski B. and Buchner B., A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems, *Journal of Computational Physics*, 206, 363-393, 2005.
- Koh H. L., Teh S. Y., Liu P. L.-F., Ismail A. I. and Lee H. L., Simulation of Andaman 2004 tsunami for assessing impact on Malaysia, *Journal of Asian Earth Sciences*, 36(1), 74-83, 2009.
- Kokh S., Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interface, thèse, Université de Paris 06, Paris, France, 2001.
- Kokh S. and Allaire G., Numerical simulation of 2D two-phase flows with interface, in *Godunov Methods: Theory and Applications*, E.F. Toro ed., Kluwer Academic/Plenum, Dordrecht/New York, 2007.
- Kreeft J. and Koren B., A new formulation of Kapila's five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment, *Journal of Computational Physics*, 229, 6220-6242, 2010.

Kulikov E., Dispersion of the Sumatra Tsunami Waves in the Indian Ocean detected by satellite altimetry, Russian journal of earth sciences, 8, ES4004, doi:10.2205/2006ES000214, 2006.

Lay T., Kanamori H., Ammon C. J., Nettles M., Ward S. N., Aster R. C., Beck S. L., Bilek S. L., Brudzinski M. R., Butler R., DeShon H. R., Ekstrom G., Satake K. and Sipkin S., The Great Sumatra-Andaman Earthquake of 26 December 2004, Science, 308, 2005.

Lhuillier D., A mean-field description of two-phase flows with phase changes, International Journal of Multiphase Flow, 29, 511-525, 2003.

Lin G. F., Lai J. S. and Guo W. D., Finite-volume component-wise TVD schemes for 2D shallow water equations, Advances in Water Resources, 26, 861-873, 2003.

Lin P. Z. and Liu P. L.-F., A numerical study of breaking waves in the surf zone, Journal of Fluid Mechanics, 359, 239-264, 1998a.

Lin P. Z. and Liu P. L. -F., Turbulence transport, vorticity dynamics, and solute mixing under plunging breaking waves in surf zone, J. of Geophysical Research, 103, 15677-15694, 1998b.

Lin W. M., Newman J. N. and Yue D. K., Nonlinear forced motion of floating bodies, Proc. 15th Symp. Naval Hydrodynamics, Hamburg, Germany, 33-49, 1984.

Liu G. R. and Liu M. B., Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method, World Scientific, 2003.

Li Y. and Raichlen F., Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes, J. Waterway., Port Coastal and Ocean Engineering, 124(6), 329-333, 1998.

Longuet-Higgins M. S. and Cokelet E. D., The deformation of steep waves on water: I. a numerical method of computation, Proc. of the Royal Society A, London, 350, 1-26, 1976.

Lubin P., Vincent S., Abadie S. and Caltagirone J., Three dimensional large eddy simulation of air entrainment under plunging breaking waves, Coastal Engineering, 53, 631-655, 2006.

Lucy L.B., A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astronomical Journal, 82, 1013-1024, 1977.

Lv X., Zou Q., Zhao Y. and Reeve D., A novel coupled level set and volume of fluid method for sharp interface capturing on 3D tetrahedral grids, Journal of Computational Physics, 229, 2573-2604, 2010.

Masella J. M., Faille I. and Gallouet T., On an approximate Godunov scheme, Int. J. of Comp. Fluid Dyn., 12, 133-149, 1999.

Mathis H., études théorique et numérique des écoulements à transition de phase, Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2010

McKee S., Tome M. F., Ferreira V. G., Cuminato J. A., Castelo A., Sousa F. S. and Mangiavacchi N., The MAC method, Computers & Fluids, 37, 907-930, 2008.

Mil-Homens J., Fortes Conceição J. E. M. and Pires-Silva A. A., An evaluation of wave propagation simulations over a barred beach with a Boussinesq-type model, *Ocean Engineering*, 37, 236-251, 2010.

Miller, R. L., Role of vortices in surf zone prediction: sedimentation and wave forces, *Soc. Econ. Paleontol. Mineral. Spec. Publ.*, 24, Ed. R. A. Davis, R. L. Ethington, 92-114, 1976.

Miyata H., Finite-difference simulation of breaking waves, *Journal of Computational Physics* 65, 179- 214, 1986.

Morgan K. L. M., Coastal Change during Hurricane Dennis 2005: U.S. Geological Survey Fact Sheet, 2009-3027, 2 p, 2009.

Müller S., Adaptive Schemes for Conservative Laws, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Berlin: Springer Verlag, ISBN 3-540-44325-8, 2002.

Müller S. and Stiriba Y., Fully adaptive multiscale schemes for conservation laws employing locally varying time stepping, *J. Sci. Comput.*, 30(3), 493-531, 2007.

Murronne A., Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, thèse, Université de Prov. Aix-Marseille 1, Marseille, France, 2003.

Nguyeng Q. L., Adaptation dynamique de maillage pour les écoulements diphasiques en conduite pétrolières, Thèse, Université Paris 6, Paris, 2009.

Olsson E. and Kreiss G., A conservative level set method for two phase flow, *Journal of Computational Physics*, 210, 225-246, 2005.

Osher S. and Sanders R., Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids, *Math. Comp.*, 41(164), 321-336, 1983.

Osher S. and Sethian J. A., Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation, *Journal of Computational Physics*, 79, 12, 1988.

Osher S. and Fedkiw F., Level set methods and dynamic implicit surfaces, vol. 153 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer, New York, 2003.

Paris R., Wassmer P., Sartohadi J., Lavigne F., Barthomeuf B., Desgages E., Grancher D., Baumert P., Vautier F., Brunstein D. and Gomez C., Tsunamis as geomorphic crises: Lessons from the December 26, 2004 tsunami in Lhok Nga, West Banda Aceh (Sumatra, Indonesia). *Geomorphology*, 104, 59-72, 2009.

Pelinovsky E., Troshina E., Golinko V., Osipenko N. and Petrukhin N., Run-up of tsunami waves on a vertical wall in a basin of complex topography, *Phys. Chem. Earth (B)*, 214 (5), 431-436, 1999.

Peregrine D., Breaking waves on beaches, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 15, 149-178, 1983.

Peregrine D., Bredmose H., Bullock G., Obhrai C., Müller G. and Wolters G., Water wave impact on walls and the role of air, *Proc. 29th Int. Conf. Coastal Engineering*, Lisbon 2004, vol. 4, ASCE, 4005-4017, 2004.

- Phung D. H., Tanimoto K., Vu Thanh C., Numerical simulation of breaking waves using a two-phase flow model, *Applied Mathematical Modelling*, 28, 983-1005, 2004.
- Plumerault L. -R., Modélisation numérique d'impacts de vagues sur un mur: prise en compte de la présence d'air dans l'eau, thèse, Université de Pau et des pays de l'Adour, France, 2009.
- Rivera P. C., Modelling the Asian Tsunami Evolution and Propagation with a New Generation Mechanism and a Non-Linear dispersive Wave Model, *Science of Tsunami Hazards*, 25(1), 18-33, 2006.
- Romenski E., Resnyansky A. D. and Toro E. F., Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures, *Quarterly of Applied Mathematics*, 65, 259-279, 2007.
- Rouy S., Modélisation mathématique et numérique d'écoulements diphasiques compressibles: Application au cas industriel d'un générateur de gaz, Thèse, Université de Toulon et du Var, Toulon, France, 2000.
- Sakai T., Mizutani T., Tanaka H. and Tada Y., Vortex formation in plunging breaker, *Proceedings of 20th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, 711-723., 1986.
- Sambe A. N., Golay F., Fraunie P., Sous D., Rey V., Marcer R. and De Jouette C., Two phases flow unstructured grid solver: Application to tsunami wave impact, In: *ISOPE*, 2009.
- Sambe A. N., Golay F., Fraunie P., Sous D., Rey V., Marcer R. and De Jouette C., Two phases flow unstructured grid solver: Application to tsunami wave impact, *International Journal of Offshore and Polar Engineering* (ISSN 1053-5381), 21(3), 186–191, 2011a.
- Sambe A. N., Sous D., Golay F., Fraunié P., and Marcer R., Numerical wave breaking with macro-roughness, *European Journal of Mechanics B Fluids*, doi:10.1016/j.euromechflu.2011.03.002, 2011b.
- Sammarco P. and Renzi E., Landslide tsunamis propagating along a plane beach, *Journal of Fluid Mechanics*, 598, 107-119, 2008.
- Saurel R. and Abgrall R., A simple method for compressible multifluid flows, *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(3), 1115-1145, 1999a.
- Saurel R. and Abgrall R., A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, *Journal of Computational Physics*, 150, 425-467, 1999b.
- Saurel R., Petitpas F. and Berry R. A., Simple and efficient relaxation for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures, *Journal of Computational Physics*, 228, 1678-1712, 2009.
- Scardovelli R. and Zaleski S., Interface Reconstruction with Least-Square Fit and Split Eulerian-Lagrangian Advection, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41, 251-274, 2003.
- Scheffer D. R. and Zukas J. A., Practical aspects of numerical simulation of dynamic events: material interfaces, *International Journal of Impact Engineering*, 24 (5-6), 821-842, 2000.

Shah A. and Yuan L., Numerical solution of a phase field model for incompressible two-phase flows based on artificial compressibility, *Computers & Fluids*, 42, 54-61, 2011.

Shakibaeinia A. and Jin Y., A mesh-free particle model for simulation of mobile bed dam break, *Advances in Water Resources* 34, 794-807, 2011.

Sethian J. A., *Level set methods*, vol. 3, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, *Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science*, 1996.

Seguin N., *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, Thèse, Université de Provence, Marseille, 2002.

Shin S. and Juric D., Modelling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity, *J. Comput. Phys.*, 180, 427–470, 2002.

Sinilo F., *Déferlement 3D*, rapport de stage, Université Sud Toul Var, Toulon, France, 2007.

Skotnera C. and Apeltb C. J., Application of a Boussinesq model for the computation of breaking waves, *Ocean Engineering*, 26, 927-947, 1999.

Strubelj L., Tiselj I. and Mavko B., Simulations of free surface flows with implementation of surface tension and interface sharpening in the two-fluid model, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30, 741-750, 2009.

Strubelj L. and Tiselj I., Two-fluid model with interface sharpening, *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 85, 575-590, 2011.

Sun J., Liang S., Sun Z. and Zhao X., Simulation of Wave Impact on a Horizontal Deck Based on SPH Method, *Marine Sci. Appl.*, 9, 372-378, 2010.

Sussman M., Fatemi E., Smereka P., and S. Osher S., An Improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows, *Computers & Fluids*, 27(5-6), 663-680, 1998.

Svendsen I. A. and Putrevu V., Surf-zone hydrodynamics, In *Adv. Coastal Ocean Engineering*, 2, 1-78, 1996.

Tanaka M., The stability of solitary waves, *Phys. Fluids*, 29(3), 650-655, 1986.

Tan L. W. and Chu V. H., Regular periodic waves run-up and overtopping simulations by Lagrangian blocks, *Proceedings of the Inter. Conference on Coastal Engineering*, 32, 2010.

Tanguy S., *Développement d'une méthode de suivi d'interface, application aux écoulements diphasiques*, thèse, université de Rouen, Rouen, France, 2004.

Titov V. V. and Synolakis C. E., Modeling of breaking and nonbreaking long wave evolution and run-up using VTCS-2, *Journal of Waterways, Ports, Coastal and Ocean Engineering*, 121(6), 308-316, 1995.

Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2nd ed., Springer: New York, 1999.

Unverdi S. and Tryggvason G., A front-tracking method for viscous, incompressible multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100, 25-37, 1992.

Van Leer B., Towards the ultimate conservative difference scheme. a second order sequel to the godunov's method, *Journal of Computational Physics*, 32, 101-136, 1979.

Vincent S., Caltagirone J. P., Lubin P. and Randrianarivelo T., An adaptive augmented Lagrangian method for three-dimensional multimaterial flows, *Computers and Fluids*, 33(10), 1273-1289, 2004.

Vincent S., Balmigère G., Caltagirone J. P. and Meillot E., Eulerian-Lagrangian multiscale methods for solving scalar equations - Application to incompressible two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, 229, 73-106, 2010.

Vinje T. and Brevig P., Nonlinear ship motions, In: *Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Paris, France, 257-268, 1981.

Violeau D., *Mécanique des écoulements faiblement compressibles et application à la méthode SPH*, 2010, *à paraître*.

Watanabe Y. and Saeki H., Three-dimensional large eddy simulation of breaking waves. *Coastal Engineering*, 41, 281-301, 1999.

Welch J.E., Harlow F.W., Shannon J.P. and Daly B.J., *The MAC Method: A computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surfaces*, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-3425, 1966.

Wong J. S., Darmofal D.L, Peraire J., The solution of the compressible Euler equations at low Mach numbers using a stabilized finite element algorithm, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(43-44), 5719-5737, 2001.

Wu T. -R. and Liu P. L.-F., A large eddy simulation model for tsunami and run-up generated by landslides. In: Liu P. L.-F., Yeh H. and Synolakis C. E., ed. 2009, *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, 10, World Scientific Publishing, Chap. 4, 2009.

Yasuda T., Mutsuda H. and Mizutani N., Kinematic of overturning solitary waves and their relations to breaker types, *Coastal Engineering*, 29, 317-346, 19, 1997.

Yeh H., Ghazali A. and Marton I., Experimental study of bore run-up, *Journal of Fluid Mechanics*, 206, 563-578, 1989.

Youngs D. L., Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, In *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 273-285, 1982.

Zelt, J. A., The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves, *Coastal Engineering* 15, 205-246, 1991.

Zhao H. K., Merriman B., Osher S. and Wang L., Capturing the behaviour of bubbles and drops using the variational level set approach, *Journal of Comput. Physics*, 143, 495, 1998.

Zhao Q., Armfield S., Tanimoto. K., Numerical simulation of breaking waves by a multi-scale turbulence model, *Coastal Engineering*, 51, 53-80, 2004.

Zheng K., Sun Z. and Sun J., Numerical simulations of water wave dynamics based on SPH methods, *Journal of Hydrodynamics*, 21(6), 843-850, 2009.

Zhou J. G., Causon D. M., Mingham C. G. and Ingram D. M., Numerical prediction of dambreak flows in general geometries with complex bed topography, *ASCE J Hydraulic Engineering*, 130(4), 332-40, 2004.

Partie 4

Annexes: Evaluation du code par rapport au logiciel de calcul Fluent sur le cas du Dambreak 3D

Table des matières

8.	ANNEXES: COMPARAISONS DU CODE AVEC FLUENT D'ANSYS.....	189
8.1	Introduction	189
8.2	Le modèle bi-fluide de Fluent	189
8.3	Le modèle numérique de Fluent.....	191
8.4	Résultats	191
8.5	Comparaison avec le modèle Euler bi-fluide	198

8. Annexes: Comparaisons du code avec Fluent d'Ansys

8.1 Introduction

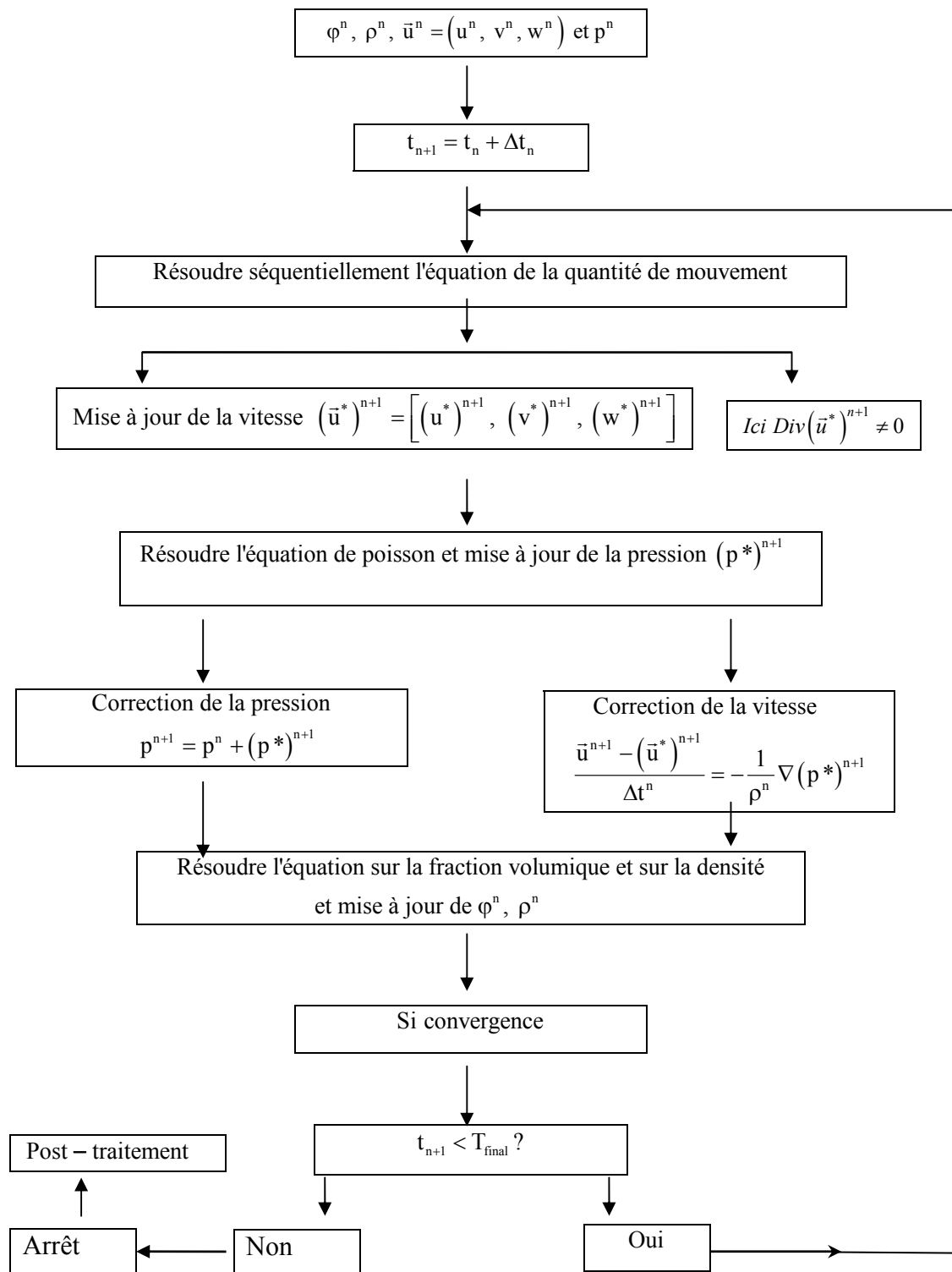
Les performances du code de calcul sont ici évaluées par rapport à Fluent. Le cas physique choisit est le cas de la rupture de barrage en 2D précédemment étudié. Fluent est un logiciel commercial qui fournit des capacités de modélisation pour une très large gamme d'écoulement [Ansys Fluent 2009]. Ces écoulements peuvent être incompressibles, compressibles, laminaires et turbulents. Il est utilisé dans beaucoup de domaine de l'ingénierie, tels que l'automobile, aérodynamique, l'hydrodynamique. De nombreux modules existent dans ce logiciel pour l'ensemble des écoulements multiphasiques. Ces modules peuvent être utilisés pour l'analyse des gaz-liquide, gaz-solide, liquide-solide et aussi gaz-liquide-solide. Les phénomènes de combustion, de cavitation y sont modélisés. Malgré ce large éventail d'applicabilité qu'offre Fluent, ce code n'est pas encore entièrement validé dans le domaine de l'hydrodynamique offshore. Par exemple les problèmes multiphasiques avec des surfaces libres complexes sont souvent mal évalués [Abdolmaleki *et al.*, 2004]. Il s'agit aussi, outre les comparaisons avec notre modèle, d'étudier les possibilités de Fluent dans ces types d'écoulements en présence d'une distorsion importante de la surface libre.

8.2 Le modèle bi-fluide de Fluent

Le CFD FLUENT du package d'ANSYS est ici utilisé. Pour plus de détail sur ce code, le lecteur pourra consulter [Ansys Fluent 2009a] et [Ansys Fluent 2009b]. On décrit le modèle bi-fluide qui a servi pour notre simulation avec Fluent. L'écoulement air/eau est simulé par un modèle compressible de Navier-Stokes bi-fluide instationnaire. La turbulence n'est prise en compte, l'écoulement est visqueux et laminaire.

Le déplacement de la surface libre est effectué avec une méthode VOF. Une équation de convection est résolue pour chaque phase, c'est un modèle à 5 équations. Le modèle isotherme est choisi pour coller mieux avec notre modèle Euler bi-fluide isotherme. Vu l'incompressibilité de l'écoulement, le solveur implicite de Fluent (Pressure Based Segregated) est utilisé. L'équation de continuité et de la quantité de mouvement y sont résolues de manière séquentielle. Avec cette résolution, la condition d'incompressibilité n'est pas respectée. Une équation sur la pression (équation de poisson), qui résulte de la combinaison de ces deux équations avec la contrainte de divergence de la vitesse nulle, est utilisée pour la correction de la vitesse et de la pression. Ces étapes peuvent se résumer avec l'algorithme suivant [Ansys Fluent 2009a]:

✓ **Exemple d'algorithme pour le solveur Pressure Based Segregated**



8.3 Le modèle numérique de Fluent

Pour le schéma d'intégration en temps, un schéma Upwind d'ordre 2 pour les équations de conservation (densité, quantité de mouvement, fractions volumiques) est utilisé. L'équation de poisson sur la pression pour évaluer celle-ci aux faces est discrétisée avec un schéma temporel PRESTO (PREssure STaggering Options) [Gustavsen *et al.*, 2001].

Le couplage pression-vitesse est assuré par un schéma PISO (Pressure Implicit with Splitting Operators)[Issa, 1986]. Ce choix a été fait sur la base des comparaisons issus des études de [Yin et Chow, 2003] et de [Jang *et al.*, 1986] de cette méthode avec les autres disponibles sous Fluent comme la méthode SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) et SIMPLER (SIMPLE-Consistent) qui sont des méthodes de correction. Pour plus de détail, le lecteur pourra consulter [Yin et Chow, 2003], [Jang *et al.*, 1986], [Vandoormaal et Raithby, 1984] et [Issa, 1986]. L'algorithme PISO a été choisi pour sa robustesse au niveau des convergences et sa précision.

Le code Fluent repose sur une approximation volume finie. Pour obtenir l'ordre de précision deux en espace, les gradients sont calculés avec la méthode Green Gauss Cell Based [Rondot, 2009].

Pour l'interface, nous utilisons une approximation du second ordre en espace avec le schéma Geo-Reconstruct [Youngs, 1982]. Ce schéma de reconstruction géométrique représente l'interface entre les fluides en utilisant une approche linéaire par morceaux. Dans ce schéma Fluent est précis et est très adapté aux maillages non structurés. Le temps de simulation est de 6s, le CFL est fixé à 0.25s. Le pas de temps variable, calculé en fonction des conditions CFL et de la vitesse de l'écoulement est de l'ordre de 0.001s.

8.4 Résultats

Les conditions initiales et conditions limites ont été choisies comme dans le cas précédent. L'initialisation (Fig.7.77) est aussi la même. Le même maillage est aussi utilisé. Les résultats obtenus avec le code Fluent pour l'élévation de la surface libre sont présentés dans les figures (Fig.7.78 à Fig.7.88). Les pressions dynamiques au niveau de l'obstacle sont aussi présentées dans ces images. Au début de la simulation à $t=0.35s$, l'eau n'a pas encore atteint l'obstacle. L'impact se fait à $t=0.43s$ et on évalue la pression dynamique maximale à 11000Pa, elle évolue jusqu'à une valeur de 14000Pa. Le moment d'impact est bien prédit par Fluent.

A $t=0.5s$, une petite langue d'eau verticale, due à l'impact, se forme sur la facette inférieure de l'obstacle. Elle se développe (Fig.7.81) et atteint son niveau maximale à $t=0.7s$ (Fig.7.82). Des gouttes d'eau peuvent être visualisées sur ces figures. Vient ensuite le moment où cette langue d'eau frappe une grande partie de la face au-dessus de l'obstacle (Fig.7.83) et englobe toute la partie de celle-ci à $t=0.98s$ (Fig.7.84). Notons que Fluent prédit l'instant de cet impact avec le dessus de l'obstacle en avance, il est 1.08s pour l'expérience, 0.9s pour notre modèle et est de 0.7s pour la présente simulation. Avec l'impact sur l'obstacle et sur la paroi du domaine de calcul, le mouvement devient très turbulent (Fig.7.84 et Fig.7.85). À ces instants, l'eau frappe toute la surface de la paroi et se retourne (Fig.7.86). Le même phénomène du va et vient comme dans l'expérience est observé. La forte turbulence est confirmée par les deux dernières figures (Fig.7.87, Fig.7.88).

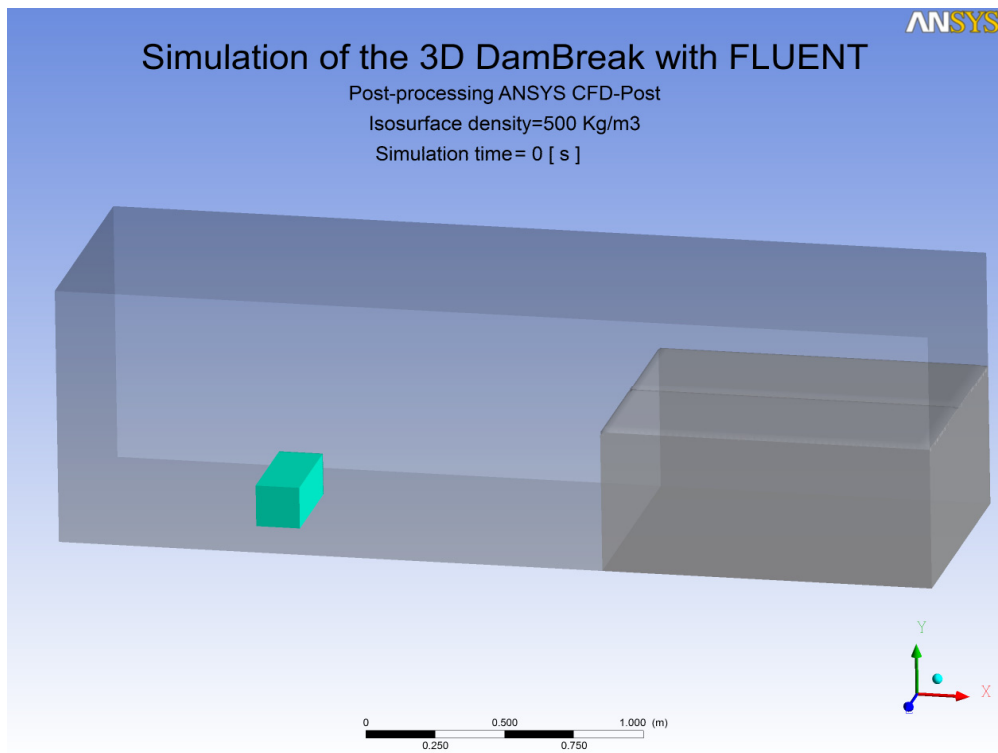


Fig.7.77: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Initialisation. Surface libre. $\varphi \geq 0.5$

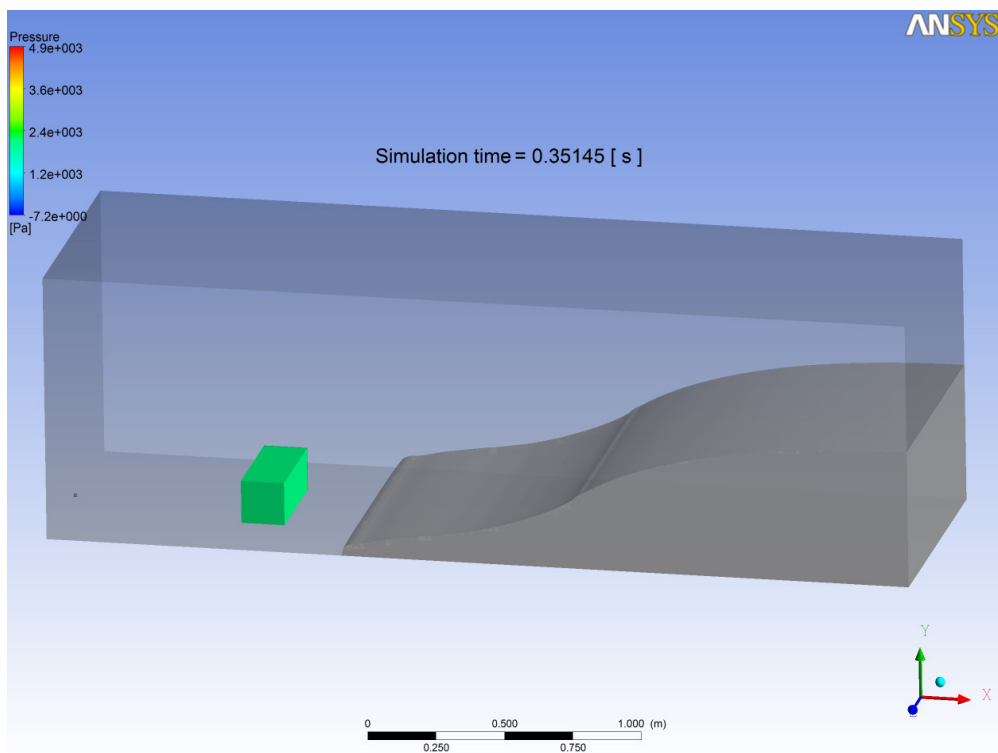


Fig.7.78: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.35s$. $\varphi \geq 0.5$

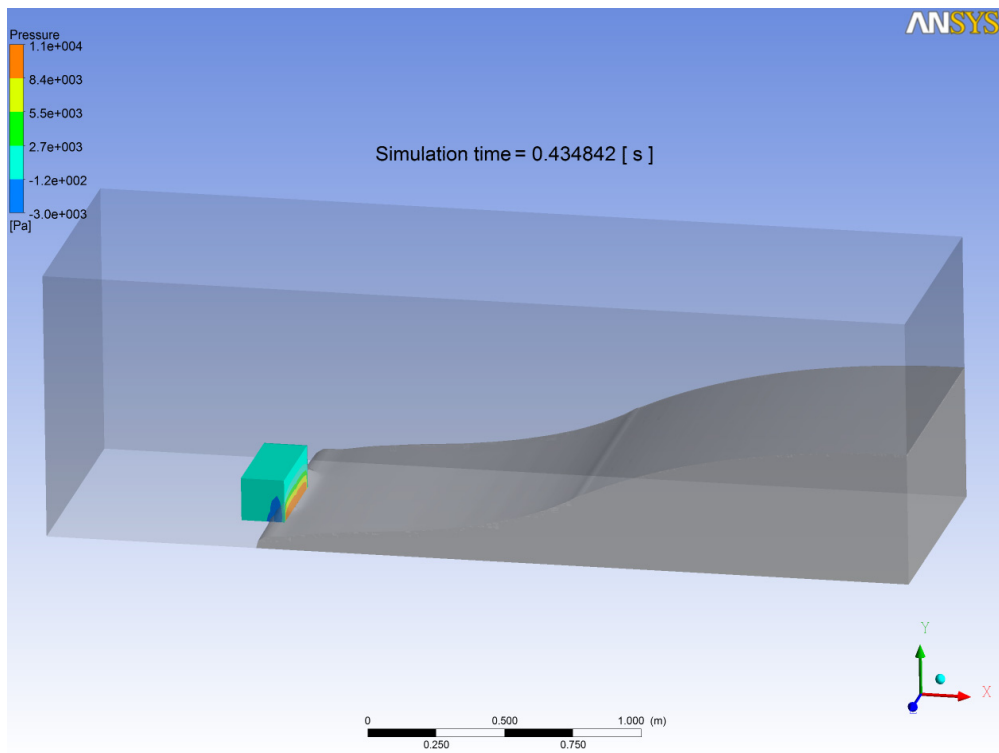


Fig.7.79: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.43s$. $\varphi \geq 0.5$

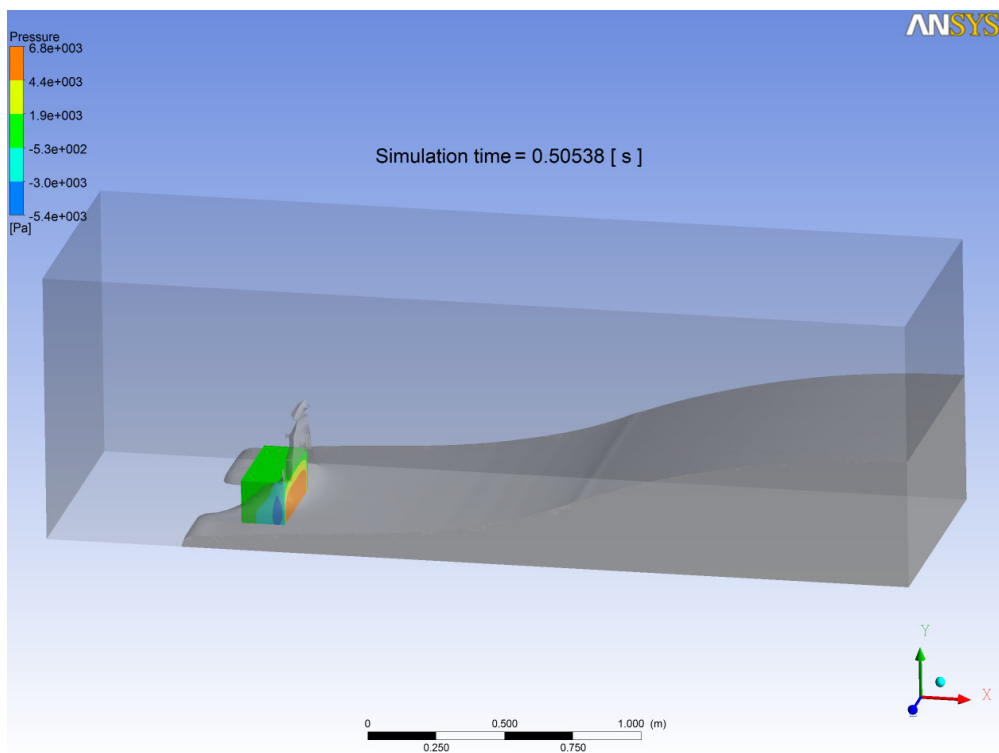


Fig.7.80: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.50s$. $\varphi \geq 0.5$

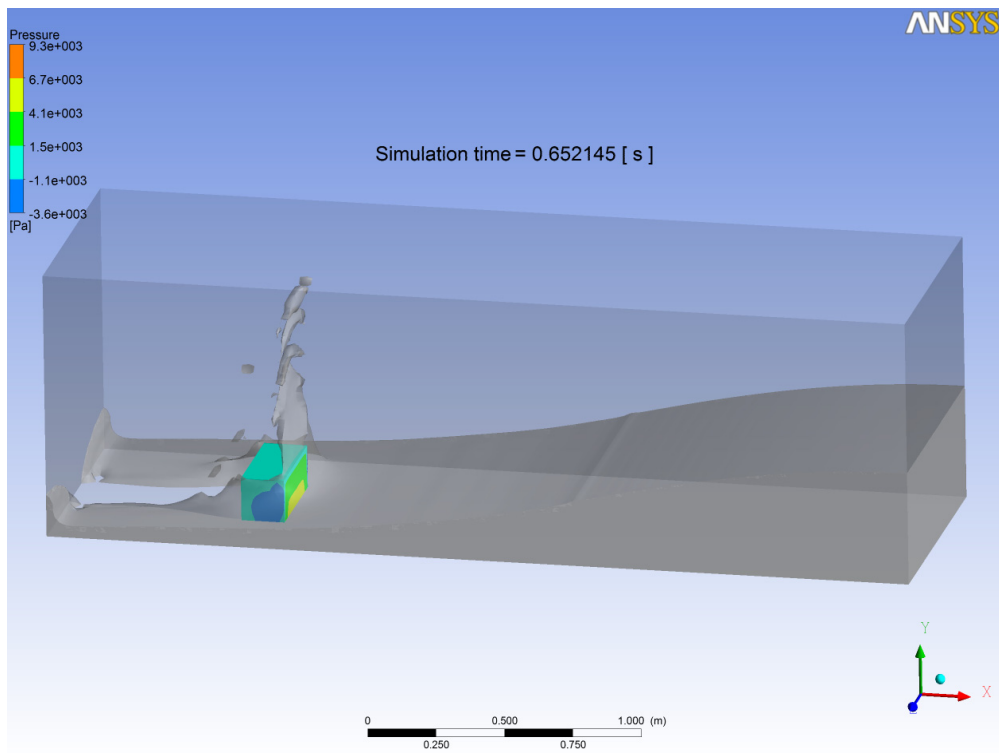


Fig.7.81: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.65s$. $\varphi \geq 0.5$

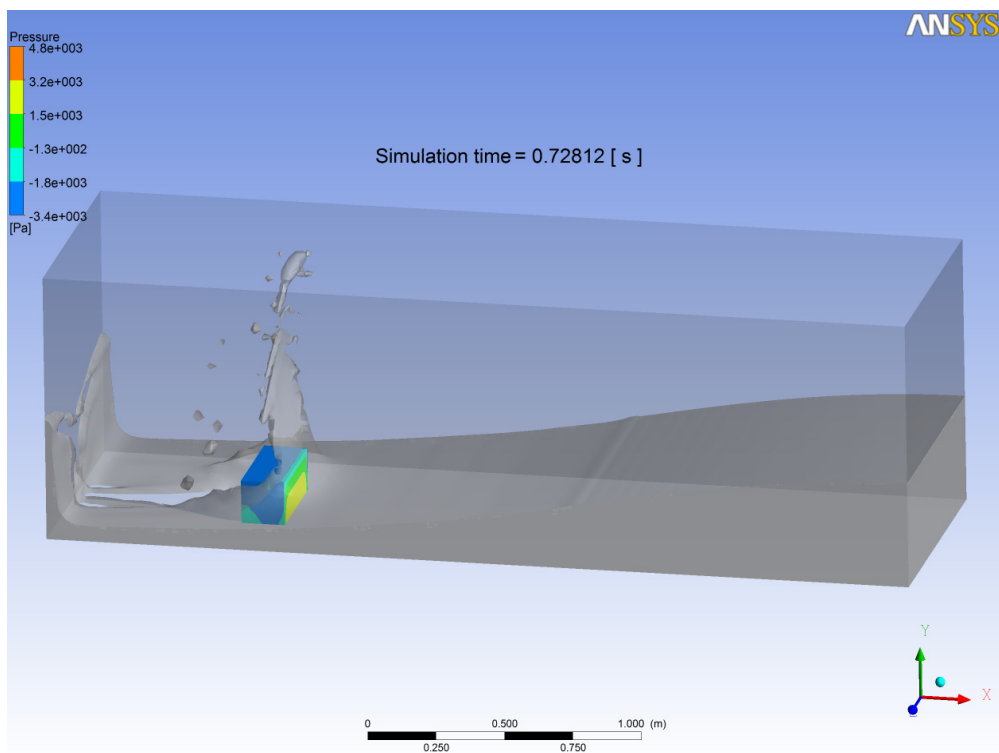


Fig.7.82: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.72s$. $\varphi \geq 0.5$

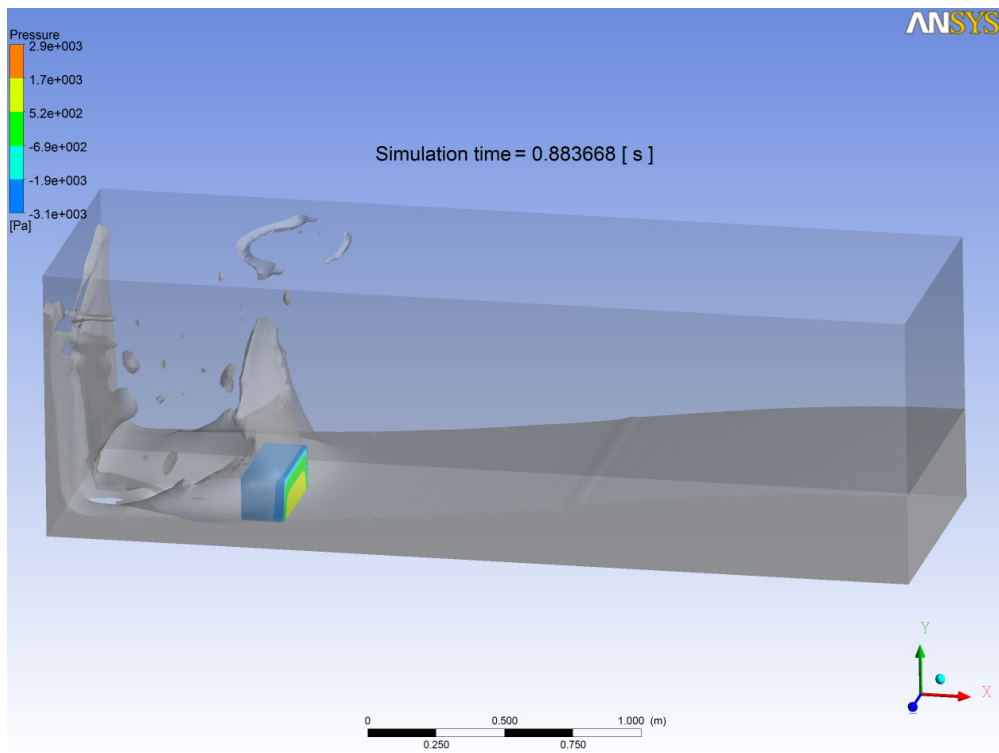


Fig.7.83: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.88s$. $\varphi \geq 0.5$

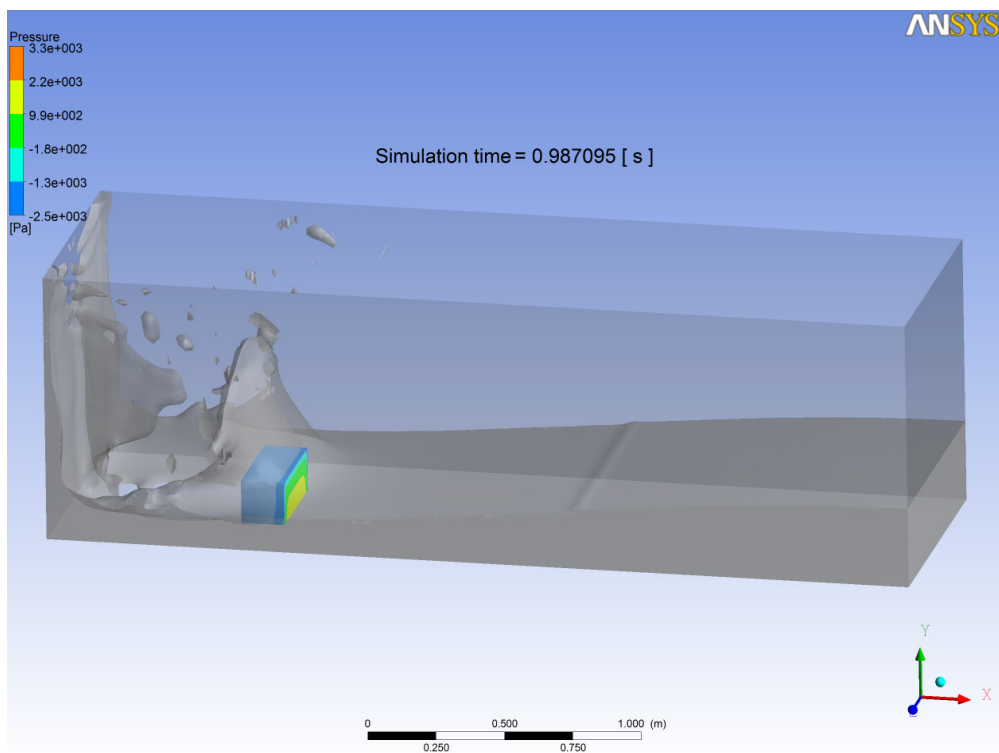


Fig.7.84: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=0.98s$. $\varphi \geq 0.5$

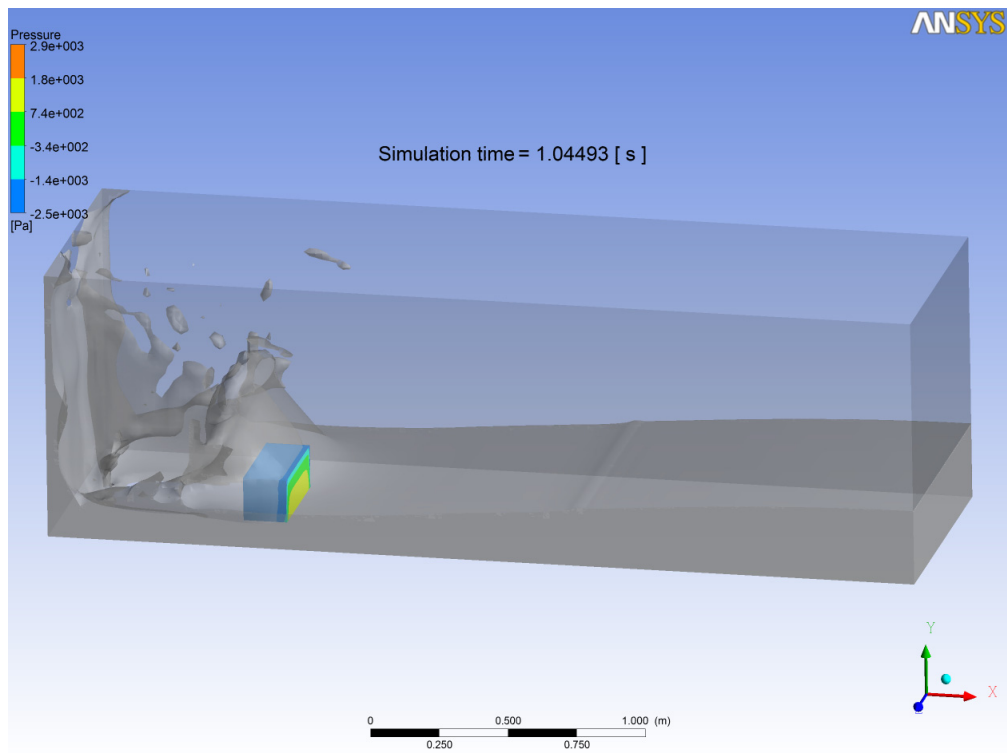


Fig.7.85: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=1.04s$. $\varphi \geq 0.5$

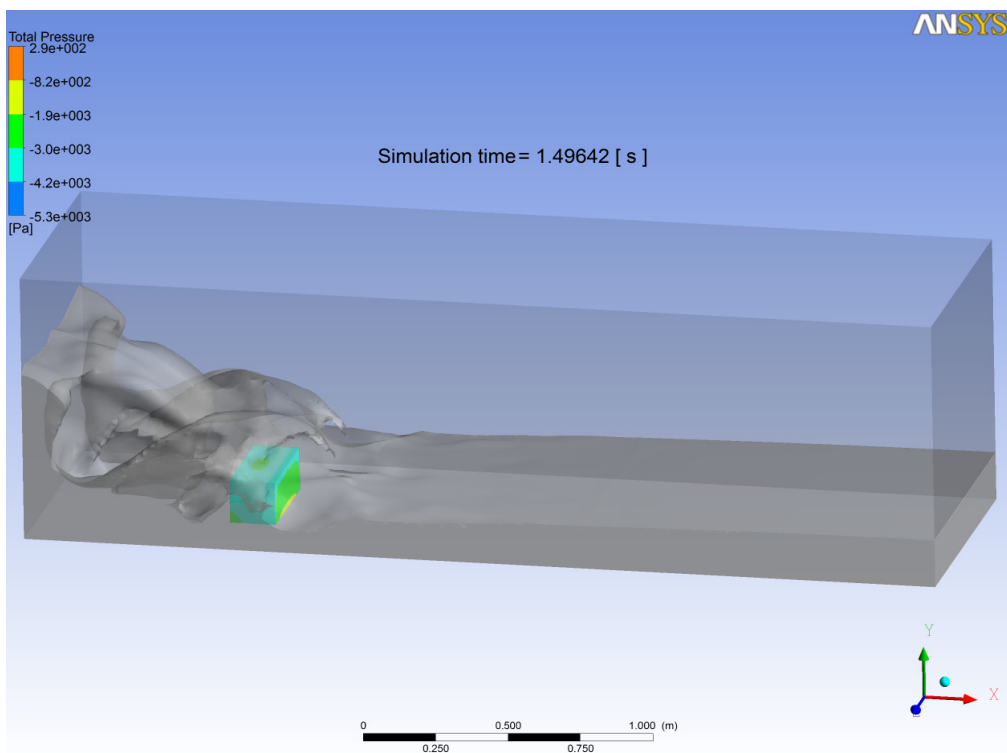


Fig.7.86: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=1.5s$. $\varphi \geq 0.5$

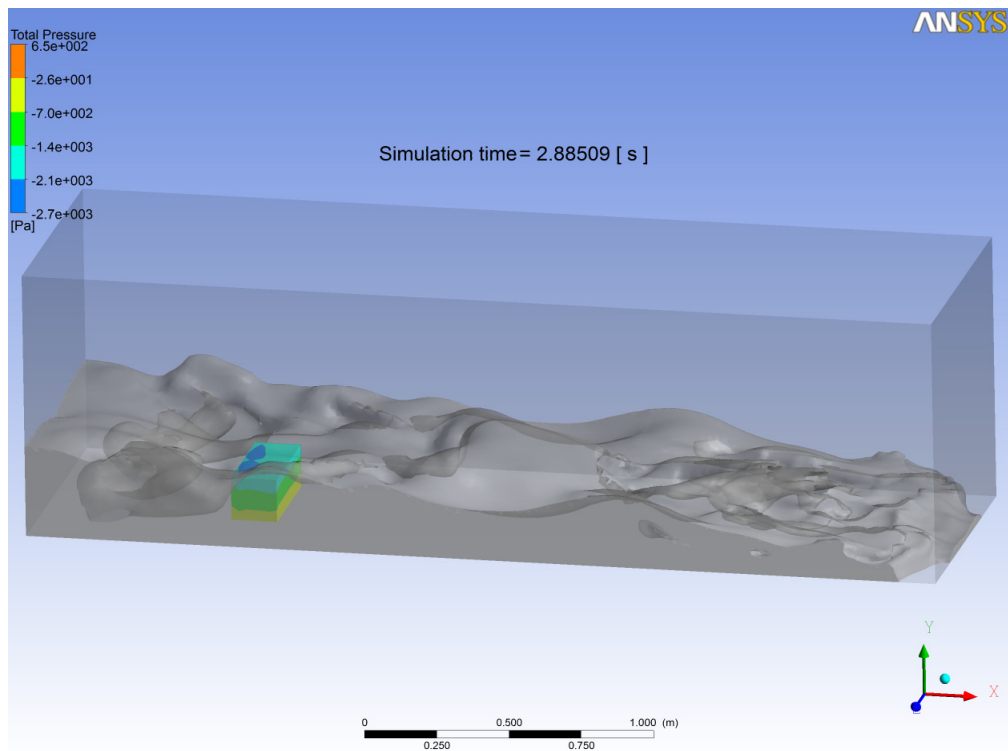


Fig.7.87: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=2.88s$. $\varphi \geq 0.5$

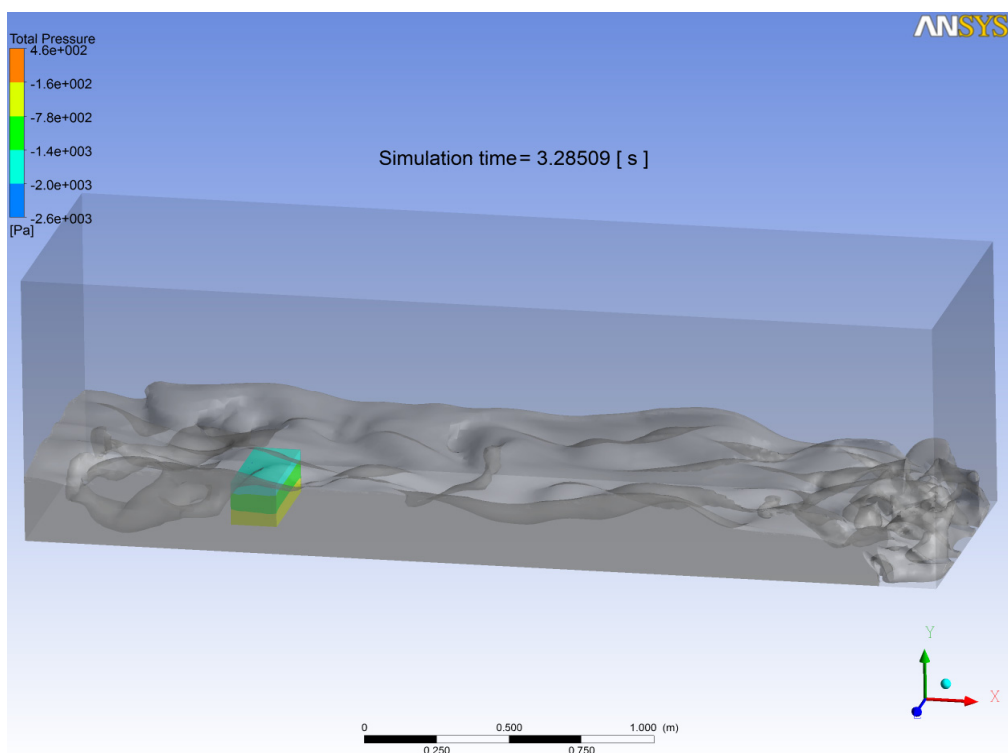


Fig.7.88: Dambreak 3D avec Fluent CFD: Surface libre à $t=3.28s$. $\varphi \geq 0.5$

8.5 Comparaison avec le modèle Euler bi-fluide

Nous présentons et comparons les résultats au cours du temps de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4 (Fig.7.89) et de la pression aux sondes P1 (Fig.7.90) obtenus avec notre code et ceux obtenus avec le logiciel Fluent.

Au niveau de la surface libre, l'allure générale de la surface libre obtenue avec Fluent au cours du temps comparable aux mesures expérimentale. Au début de la simulation, avant et juste après l'impact avec l'obstacle, les résultats de Fluent sont très proches avec l'expérience et avec les résultats de notre modèle (Fig.7.89-Fig.7.90 pour des temps inférieurs à 1s). Après l'impact, on note une dépression importante au niveau de la sonde P1 (Fig.7.90). Fluent n'évalue pas très bien les pressions après l'impact avec l'obstacle. Les auteurs qui ont travaillé avec ce code dans le cas du dambreak 2D sans obstacle ont montré que Fluent ne permet qu'une analyse qualitative des résultats (par exemple dans [Abdolmaleki *et al.*, 2004]). D'autres études s'avèrent nécessaire afin d'évaluer la capacité du code Fluent à traiter les problèmes avec des surfaces complexes. Cependant il faut noter que des études approfondies sur le choix des modèles disponibles sur FLUENT pourront être faites pour augmenter la précision des résultats. Ce travail était une première approche avec ce code industriel.

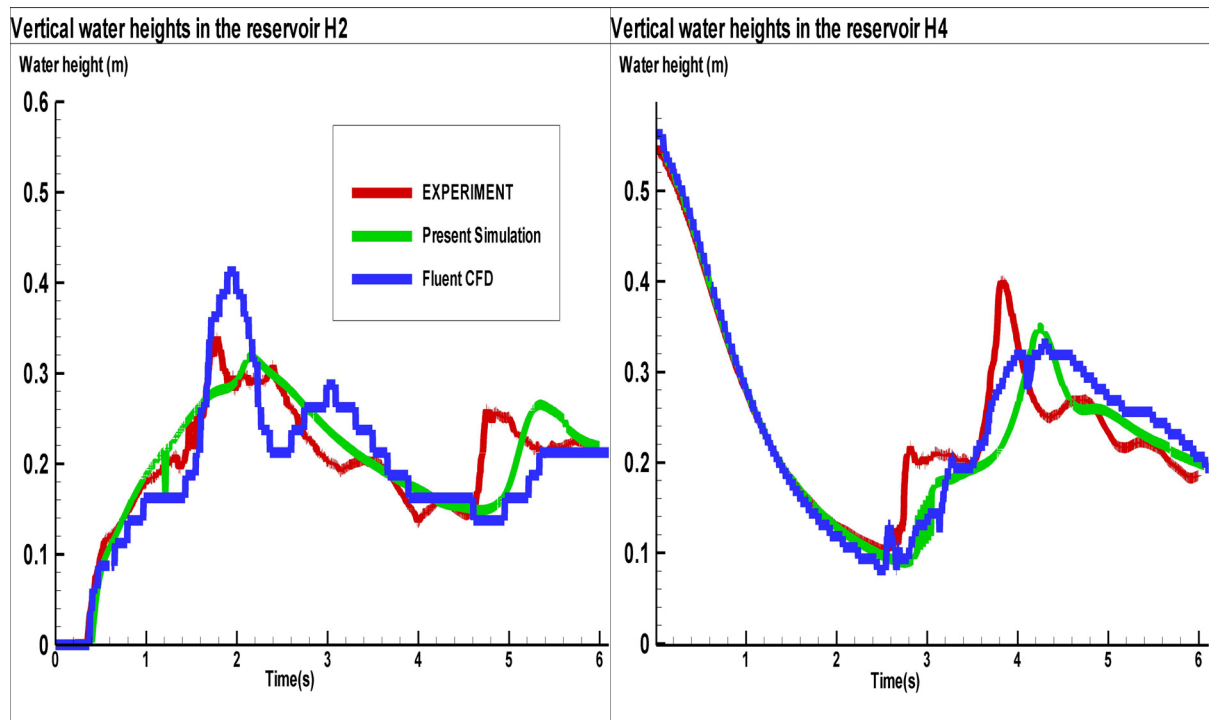


Fig.7.89: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la hauteur d'eau aux sondes H2 et H4. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques avec Fluent CFD (bleu) et la présente simulation (vert).

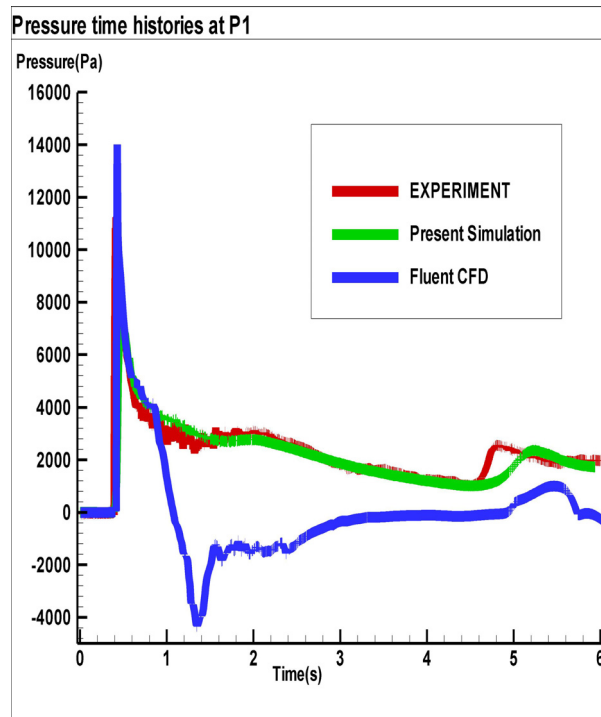


Fig.7.90: Dambreak 3D: Evolution temporelle de la pression aux sondes P1 et P7. Comparaison entre l'expérience (rouge), les résultats numériques avec Fluent CFD (bleu) et la présente simulation (vert).

Références bibliographiques

Abdolmaleki K., Thiagarajan K. P. and Morris-Thomas M. T., Simulation of The Dam Break Problem and Impact Flows Using a Navier-Stokes Solver, 15th Australasian Fluid Mechanics Conference, University of Sydney, Sydney, Australia, 2004.

Ansys Fluent 12.0, Theory Guide, Inc., Ansys 2009a.

Ansys Fluent 12.0, User Guide, Inc., Ansys 2009b.

Gustavsen L., Griffith T. and Arasteh D., Three-Dimensional Conjugate CFD Simulations of Internal Window Frame Cavities Validated Using IR Thermography, ASHRAE Transactions, 107(2), 2001.

Issa R. I., Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting, Journal of Computational Physics, 62, 40-65, 1986.

Jang D. S., Jetli R. and Acharya S., Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems, Numerical Heat Transfer, 10, 209-228, 1986.

Rondot L., Modélisation magneto-hydrodynamique par la méthode des volumes finis: Application aux plasmas de coupure, thèse, Grenoble, France, 2009.

Vandoormaal J. P. and Raithby G. D., Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, Numerical Heat Transfer, 7, 147-163, 1984.

Yin R. and Chow W. K., Comparison of four algorithms for solving pressure-velocity linked equations in simulations atrium fire, Int. Journal on Architectural Science, 4(1), 24-35, 2003.

Youngs D. L., Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, In Numerical Methods for Fluid Dynamics, 273-285, 1982.